欧姆社学习漫画

漫画电气数学

〔日〕田中 贤一／著
〔日〕松下 マイ／漫画绘制
〔日〕オフィスsawa／漫画制作
高丕娟／译

科学出版社

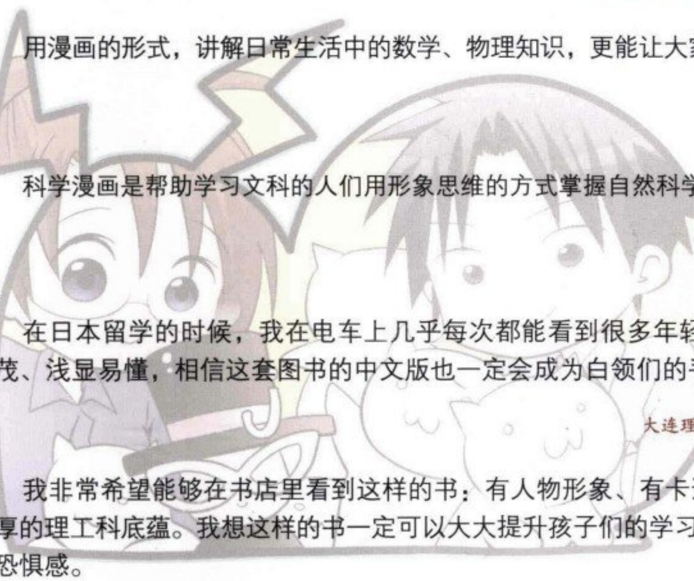
（O-4754.0101）
责任编辑：张丽娜 赵丽艳
责任制作：董立颖 魏 谨
封面制作：泊 远

用漫画这种形式讲数学、物理和统计学，十分有利于在广大青少年中普及科学知识。

周恩来、邓颖超秘书，周恩来邓颖超纪念馆顾问
中日友好协会理事，《数理天地》顾问，全国政协原副秘书长 赵炜

用漫画和说故事的形式讲数学，使面貌冷峻的数学变得亲切、生动、有趣，使学习数学变得容易，这对于提高全民的数学水平无疑是功德无量的事。

《数理天地》杂志社 社长 总编
“希望杯”全国数学邀请赛组委会 命题委员会主任 周國镇



用漫画的形式，讲解日常生活中的数学、物理知识，更能让大家感受到数学殿堂的奥妙与乐趣。

《光明日报》 原副总编辑
中华炎黄文化研究会 常务副会长 鲁谆

科学漫画是帮助学习文科的人们用形象思维的方式掌握自然科学的金钥匙。

中国人民大学外语学院日语专业 主任
大学日语教学研究会 会长 成同社

在日本留学的时候，我在电车上几乎每次都能看到很多年轻的白领看这套图书，经济实惠、图文并茂、浅显易懂，相信这套图书的中文版也一定会成为白领们的手中爱物。

大连理工大学 能源与动力学院 博士 副教授

我非常希望能够在书店里看到这样的书：有人物形象、有卡通图、有故事情节，当然最重要的还有深厚的理工科底蕴。我想这样的书一定可以大大提升孩子们的学习兴趣，降低他们对于高深的理工科知识的恐惧感。

北京启明星培训学校 校长

书中的数学知识浅显实用，漫画故事的形式使知识贴近生活，概念更容易理解。

北京大学 数学科学学院 博士 张磊

www.sciencep.com

ISBN 978-7-03-034535-6

科学出版社 东方科龙
联系电话：010-82840399
E-mail：boktp@mail.sciencep.com
有关网址：http://www.okbook.com.cn

销售分类建议：科普

定 价：32.00元

欧[illegible]画

漫画电气数学

〔日〕田中　贤一　著
〔日〕松下　マィ　漫画绘制
〔日〕オフィスsawa　漫画制作
高　丕　娟　译

科 学 出 版 社
北 京

图字：01-2012-4087号

内容简介

你是不是正在学习电气数学知识？你是不是正为电气数学中恼人的符号头痛不已？你是不是想学好电气数学从而更好地学好电学原理？那么，对你来说，这本书再适合不过了，这是世界上最简单易学的电气数学教科书，它通过漫画式的情境说明，让你边看故事边学知识，每读完一篇就能理解一个概念，只要你跟着主人公的思路走，那么你肯定能在较短的时间内掌握电气数学相关知识！

有趣的故事情节、时尚的漫画人物造型、细致的内容讲解定能给你留下深刻的印象，让你过目不忘。无论你是学生、上班族还是对电气数学知识感兴趣的读者，活学活用你的电气数学知识，定会给你的学习、工作与生活增添更多的便利！

图书在版编目（CIP）数据

漫画电气数学/（日）田中贤一著；（日）松下マィ漫画绘制；（日）オフィス sawa漫画制作；高丕娟译.—北京：科学出版社，2012
（欧姆社学习漫画）
ISBN 978-7-03-034535-6

Ⅰ.漫… Ⅱ.①田…②松…③オ…④高… Ⅲ.电气工程-应用数学-普及读物 Ⅳ.TM11-49

中国版本图书馆CIP数据核字（2012）第111688号

责任编辑：张丽娜　赵丽艳 / 责任制作：董立颖　魏　谨
责任印制：赵德静 / 封面制作：泊　远

北京东方科龙图文有限公司　制作
http://www.okbook.com.cn

科学出版社　出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京市四季青双青印刷厂　印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2012年7月第　一　版　开本：787×1092　1/16
2012年7月第一次印刷　印张：16 3/4
印数：1—5 000　字数：264 000

定价：32.00元
（如有印装质量问题，我社负责调换）

致广大读者

本书的宗旨是用漫画这种形式，将学习电气工程和电子工程等学科过程中所必不可少的数学知识用简单易懂的语言和方法进行解释说明。以电气电路等相关的题目为例题进行解释说明，在解题过程中着重强调说明难以理解的相关数学知识，帮助大家解除疑惑，加深理解。

因此，写作本书的目的就是向那些学习电气工程和电子工程的各位朋友们，以及普通高中生等相关读者群体提供一本比较容易理解掌握的数学参考书。

如果想学习电气工程和电子工程，就不可能完全忽视对数学这门学科的学习。这是因为，电气工程和电子工程的学术体系是以数学相关知识为基础建立起来的。

实际上，在大学里学习电气电路或者电气磁性等学科的过程中，以及在职业高中学习电气基础知识的时候，如果不能提前掌握相当水平的数学知识，那么学习将会非常吃力。因此，最近出现了很多以电气数学为关键词的书籍，据说对于高级电工（即第三种电气主任技术者，这一资格考试在日本属于国家级别，分第一种、第二种和第三种，分别相当于中国的初级、中级和高级。——译者注）等资格考试很有帮助。

从这种意义上来说，本书也算是相关书籍之一，但本书不同于其他书籍的最大特点是通过漫画这种形式来解释说明数学和电气的基础知识，并运用对话的形式详细解释说明电气电路等例题的解题思路。本书在执笔过程中放弃了对严密性的过度追求，而是在实用性和简单易懂这一特性上下功夫，力求实效。这主要是为了让那些从基础知识开始学习数学的读者朋友们能够尽快入门并掌握。

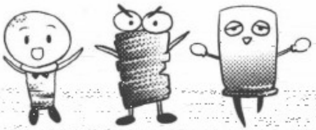
读者朋友们在读完本书后，可以再继续研读更加深奥的数学参考书（大学生可以研读电气电路或者电磁学，职业高中生们可以选择电气理论和电子技术等相关书籍），期待你们的数学知识水平能够更上一层楼。

在此，非常感谢与本书制作和出版相关的各位同仁，他们是欧姆社开发局的各位编辑、漫画绘制松下マイ、漫画制作オフィス sawa 的各位同事，与此同时，也对本书的广大读者朋友们表示衷心的感谢。如果本书能够为广大读者朋友们在学习电气电路和电子电路的过程中起到一定的作用，那将是我最大的快乐。

田中贤一

2011 年 11 月

目　录



第 2 章　用方程式和不等式解答电路问题

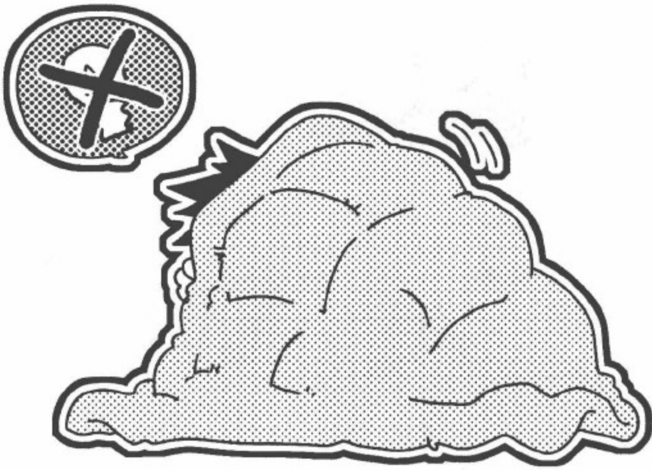
（第一部分　直流电路）　55

第 3 章　三角函数和矢量　103

第 4 章　复　数　143

序章

非常讨厌灯饰吗




——冬天，东京某处住房内
呼呼……寒流已经来袭……
咔嗒咔嗒
瑟瑟发抖
瑟瑟发抖
本次寒流的低温将冲破东京的历史纪录……
请外出的市民一定做好防寒防冻准备……
咔嗒咔嗒
瑟瑟发抖
咔嗒咔嗒
……别说是外出了，
就算在屋里呆着我都快被冻死了！
瑟瑟发抖
12/19
停电已经几天了？
唉，连起来翻翻日历的力气都没有了……


嗤——
嗞嗞
喂！可恶！连收音机也突然不出声了！
难道电池也没电了？哦，知道了，这就换上新的去！
现在也只有你还能跟我说说话了！
哇啊啊啊啊……
滋滋……
哎，这是怎么回事？好像不只是信号不好吧？
咔
嘀呜
嘀呜嘀呜
叮叮当，叮叮当，铃儿响叮当……
虽然我还一脸的茫然，但收音机里的确传出了欢快的音乐……
？
等一等！
从停电到现在一共几天了？
掐指一算
难道？
今天是……
笑——
话——
圣诞节前夜！


……
咔嗒
咔嗒
咔嗒
咔嗒
啾
心里乱糟糟的。
唉，从什么时候开始，
我既没有了朋友，也没有了女友。
慢慢腾腾地
为了上大学，我只身一人来到东京已经一年了。
学业进展得不顺利，也没有朋友能够帮我一把，就连打工也在上个月被老板开除了。
在这个连电都不通的冷如冰窖的屋子里，一个人裹着被子取暖，想起来就让人觉得难为情……
唉ｏｏｏｏｏ
澌澌……
啊，该死。
真想把那些正在约会的成双成对的男人女人们的鞋带全部切成碎末！
真冷！最近都没怎么好好吃东西，更让我倍觉寒气逼人！
不行，我可不能就这样被冻死！
如果都没有人注意到我可怎么办？
咕噜噜
啾啾
我真是没用……到底都做了些什么啊！


不好，我太过悲观了。
因为太冷了啊！危险！
渴望灯光。
啾
渴望火光，渴望暖气。
渴望来电！
快来电吧！
照亮
我的未来吧！
吱
呀
这里是……
青沼君的家吧？


我是供电公司的!
电
GOGO'S
GOGO'S
嗯，是这么回事儿!
因为这次的异常寒流持续时间很长，所以政府特别下了指令，要求我们为那些没有按时缴纳电费的居民特别供电。
所以我们就挨家挨户地进行走访，特别通知大家供电的消息。
担心突然消失了
狼吞虎咽
对不起，我还没来得及做自我介绍，我是田川电力的小橘。
请您多多关照!
名片
深深地
狼吞虎咽


咀嚼
？
请喝水！
可是，刚才真把我吓了一跳呢！突然听到“救命”。
请再多吃点吧！吃饱了才有力气工作，才能赚钱交电费！
咕咚……
……供电公司的这位姐姐，
你这么喜欢工作吗？
咕咚
咦？
哎呀，你看……今天可是圣诞节前夜，你还这样辛苦地工作。
呼
嗞……
嗞！
他现在生龙活虎的了，而且看起来心情也很愉快……
我好像问了些不该问的问题了！？


我……我才不喜欢工作呢！
我只是想出来看看灯饰！
哇啊啊啊啊
我正在考虑把那些正在约会的成双成对的男人女人们都踩扁在石头上呢！
是，是吗……
这个人患有和我一样的精神病吧……
……无所谓
这种事情想想也没什么关系！
电气是跟我们每个人的生活都密切相关的能源，对吧？
我的工作能够让很多人的生活过得更加舒适。
我总是以此为荣呢！
电气有多么重要，青沼君这次不就切身感受了一次吗？
不仅如此，从事这项工作还有很多好处！电气就是我的最爱！
真乐观
……
……电气……啊
？


关于电气，你有没有什么不好的回忆吗？
例如，触电死亡，等等？
没有，我还活得好好的呢……
……实际上我正在跟电气相关的大学里念书。
是吗？这么说来，一定会学《电气数学》了！
我好喜欢电气数学啊！
……可我却学得非常辛苦呢。
头晕脑胀
R(Ω)
L(H)
I(A)
V_R(V)
V_L(V)
V_C(V)
C(F)
V(V)
i_L
i_i
R
L
C
V_{be}
$g_m V_{be}$
R_L
R_1
R_2
R_G
R_3
R_4
头晕脑胀
在这样的电路中，请求出其中的……。
所谓电气数学，最终不过是“解答电气电路相关问题的数学”罢了，对吧？
我……本来就不擅长数学，所以……
我现在每天都在为选择了这所大学而后悔不已……
……也不是，其实我是真的很想学习电气知识才来东京的，
但因为对学习的内容一窍不通，所以才变得这么消极悲观……


咚
啪

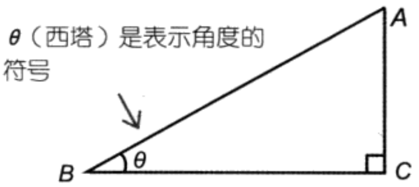

干……干什么呀？
青沼君，请不要误会我的好意。


所谓电气数学
就是利用数学这一工具达到更深刻地了解电气知识这一目的的学科。


是吧……首先，请回忆一下在高中时代学习的数学知识。
还记得sin(sine)、cos(cosine)、tan(tangant)吗？
啊……


这些像咒语文字一样的符号……
是那个那个！三角函数！
确实是三角函数的……噢……

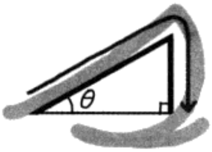
三角函数



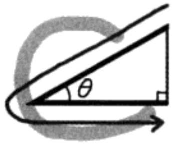
$$\frac{AC}{AB} = \sin\theta$$

$$\frac{BC}{AB} = \cos\theta$$

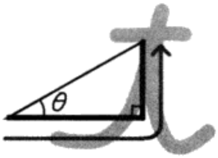
$$\frac{AC}{BC} = \tan\theta$$



左图中用粗线表示的三角形的两个边长和角 θ 之间的关系用 sin θ 来表示。
（请记住手写体“s”）



左图中用粗线表示的三角形的两个边长和角 θ 之间的关系用 cos θ 来表示。
（请记住手写体“c”）



左图中用粗线表示的三角形的两个边长和角 θ 之间的关系用 tan θ 来表示。
（请记住手写体“t”）

※ 详细内容将在第 1 章中进行解释说明。


对、对不起啊！
一说到电气的话题，我就忍不住激动起来了……
没关系……
电气的话题？
嗯，这样吧，我们通过举身边的例子来学习电气数学吧。
“为什么站在电线上的麻雀不会触电呢？”
“跟10年前的空调相比，如今的空调在调控同一温度时为什么更能省电？”
……所有这些疑问，电气数学都能够进行解答。
——今天，我和青沼君能够因电气这个缘故在圣诞节前夜相见，也算是一种缘分吧。
但是，因为缘分是肉眼看不见的东西，所以不能说是正确答案。
然而，电气数学能够给出正确答案，
且这个答案是清楚明确的。


这可真是……
太好了啊!
怎么感觉……这个人好奇怪呢。
的确，如果能求出明确答案当然是好事了。
条子。
是啊!
你要是愿意，让我教你电气数学知识吧?
什么?
马上就到了岁末年初的连休时间了……既然你好不容易才对电气知识这么感兴趣，那我就帮帮你吧!
可是……
……
笑眯眯
笑眯眯

后来我认真分析过这次的偶然相遇，

这真的照亮了我的未来！

第 1 章

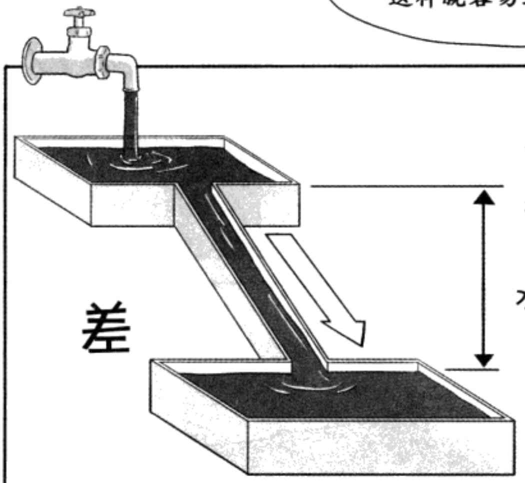
什么是电气数学

1 电气的基础知识


电力博物馆
哇！
我一直都不知道，原来附近还有这样的场馆呢……
从家步行5min就到了！
哈哈！是最近刚刚建成的啦。
哎呀，就算如此，那也很麻烦您了。
今天本应该是休息日吧？
是的，不过，真的不用这么客气呀。
反正我也没什么事儿……
出现了！
消极悲观的味道！
吊儿郎当……


电
太好了！
电气的结构
休息日也能接触电气知识，真是太幸福了！
好了，我们马上开始吧！
这些看起来真可爱……
给小孩子看的？
我还处于婴儿水平？
很可爱吧！孩子们也都很喜欢呢。
可是，反过来说，正因为是给孩子们准备的学习材料，所以就算是非常严肃、高深的道理，也表述得非常简单易懂。
这样首先能够让学习的人愿意亲近电气的世界！
说来也是。
我会加油的。
好！加油吧！

电气相关用语



水会从高的地方流向低的地方。电气也具有相同的特点。就像水位差（水压）产生水的流动一样，电位差（电压）产生了电气的流动。

水位差＝电位差

‖

电压

也就是说，所谓“电压”就是**让电气产生流动的压强。**

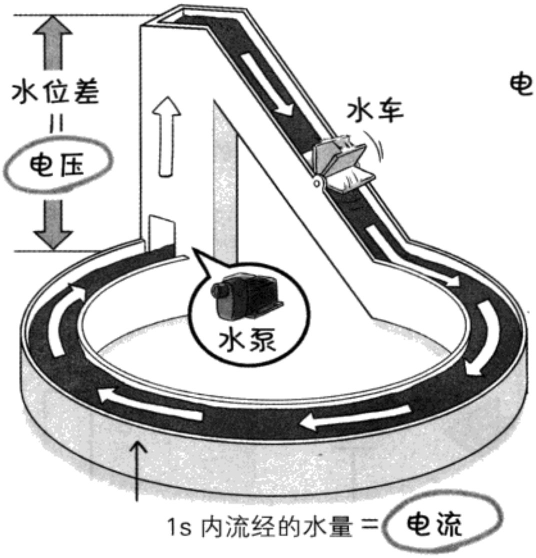
电气的符号和单位

量	符号	单位
电压	V 或者 E	V（伏特）
电流	I	A（安培）
电阻	R	Ω（欧姆）
电功率	P	W（瓦特）
频率（参考第 34 页）	f	Hz（赫兹）

Q. 为什么电压的表示符号有两个呢？

A. *V 指的是电压或者电压降，E 指的是电源电压。*
电压一般按照以上所述分成两类。

（本书将从第 2 章开始将两者分开使用）



电压×电流 =电功率

所谓“电流”
指的是 1s 内流经的电量。

所谓“电功率”
指的是电流流动过程中在 1s 内所完成的工作量。

请关注水车！

水车在电气的例子中可以看做小型电灯泡。
就像水车由于水流的作用进行旋转而完成工作一样，小型电灯泡会因为电流的作用而完成发光这项工作。
与此同时，无论是水车还是小型电灯泡都会成为流动的障碍。
像这样的物体被称作“**负荷**”。
因为负荷阻碍流动，于是产生了“**电阻**”。
所谓**电阻**指的是“阻碍流动”的意思。

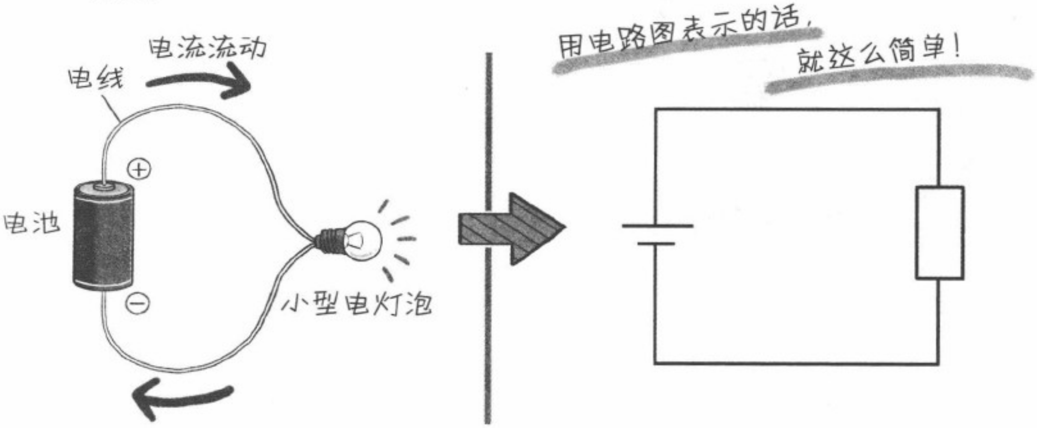
请关注水泵！

水泵的作用是把水上扬到高处而产生水压，在电气的例子中，可以把水泵看做干电池。
如果没有水泵和干电池，就不会产生流动。
在电气电路中，这被称作“**电源**”。
也就是电气的源泉这一部分。

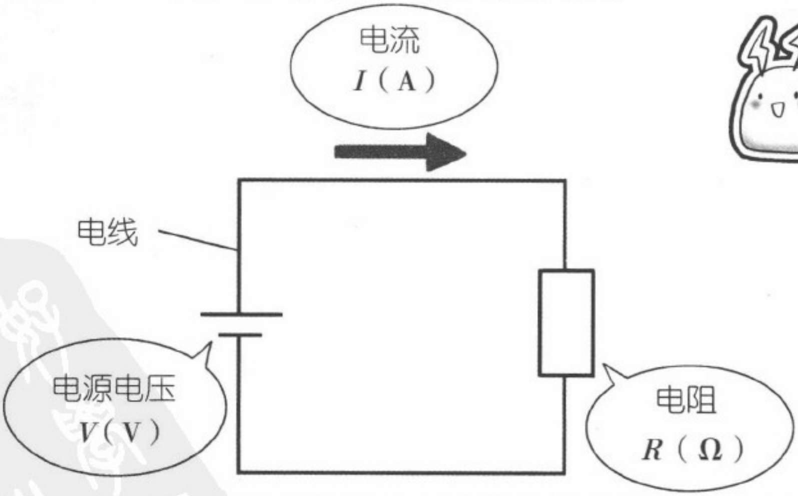
部分内容引用了腾龙和弘所著的《漫画电气》欧姆社（2006）。

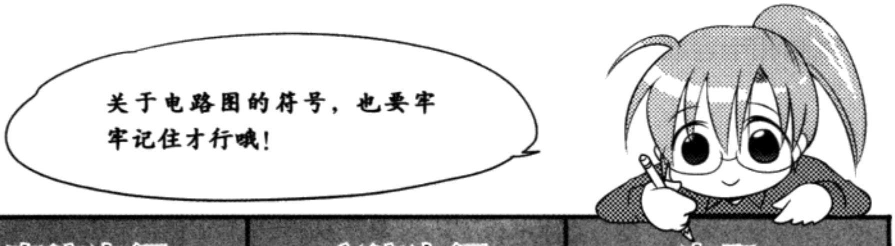
电气电路的基础知识

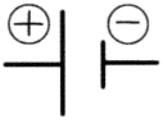
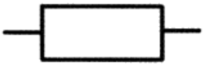
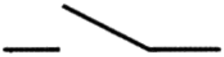
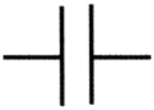
所谓电气电路指的是电流循环流动的路径。
所谓电气电路图，一般简称电路图，就是把电气电路用简单的符号表示出来的图表。



电气电路由**电源电压、电流、电阻**三部分构成，这三部分通过电线连接在一起。在下图所示的电气电路中，电源电压就是干电池，产生电阻的就是作为负荷的小型电灯泡。
电气电路一定是一个闭合的形状，所以也被称作**闭合电路**。

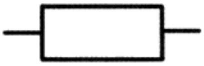




直流电源	交流电源	电阻
		
干电池等。 请注意加号（长线）和减号（短线）的区别。	家庭中所使用的插座等。	电灯泡等负荷全部都是电阻。
开关	**线圈**	**电容器**
		
通过开、关的交替操作来控制电流的流动。	把电线转圈缠绕的物体。	由两块金属板组合而成。
	★关于线圈和电容器将在第 22 页进行详细说明。	

在画电路图的时候，要使用 JIS（日本工业规格：Japan Industrial Standards）中所规定的作图符号。


旧

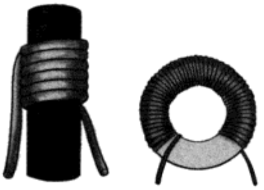

新

关于电阻的符号，旧 JIS(1952 年制定）和新 JIS(1997 ~ 1999 年制定）分别有不同的规定，其中旧 JIS 中所规定的符号也经常被使用。

线圈和电容器

关于线圈

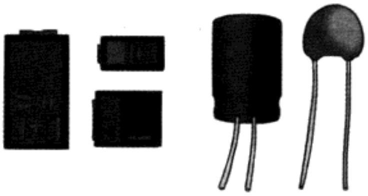
一般应用在发动机中，或者作为信号接收器天线的一部分来使用。



关于电容器

也被称作蓄电器。
是能够把电能暂时储存起来的器件。

被广泛用于电子电路的各个部分，或者被用来减少电功率的浪费。



线圈和电容器在电子电路中起着不同的作用。

欧姆定律

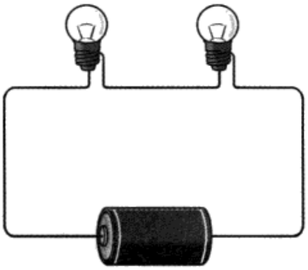
电流 I 和电压 V 成正比，和电阻 R 成反比。
这就是欧姆定律，是电气电路中最重要、最根本的定律。

$$\text{电流}\ I = \frac{\text{电压}\ V}{\text{电阻}\ R}$$

串联和并联

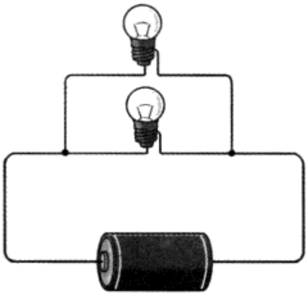
电气电路的连接方法大体上分为两种。

串联连接



两个电阻呈直线状连接。

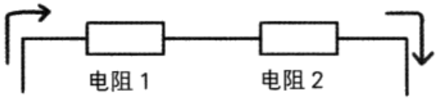
并联连接



两个电阻并列连接。

串联连接

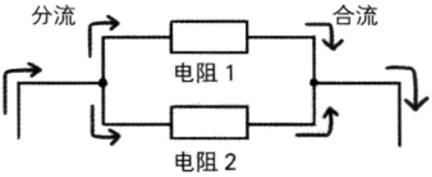
电流流经每个地方时大小都一样。



电源的电流 = 电阻 1 的电流 = 电阻 2 的电流

电源的电压 = 电阻 1 的电压 + 电阻 2 的电压

并联连接



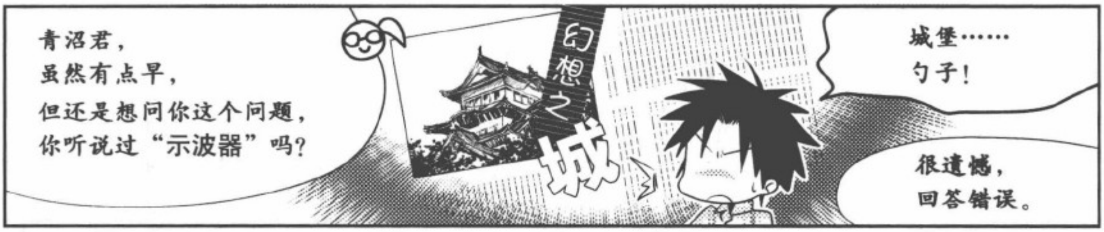
电源的电流 = 电阻 1 的电流 + 电阻 2 的电流

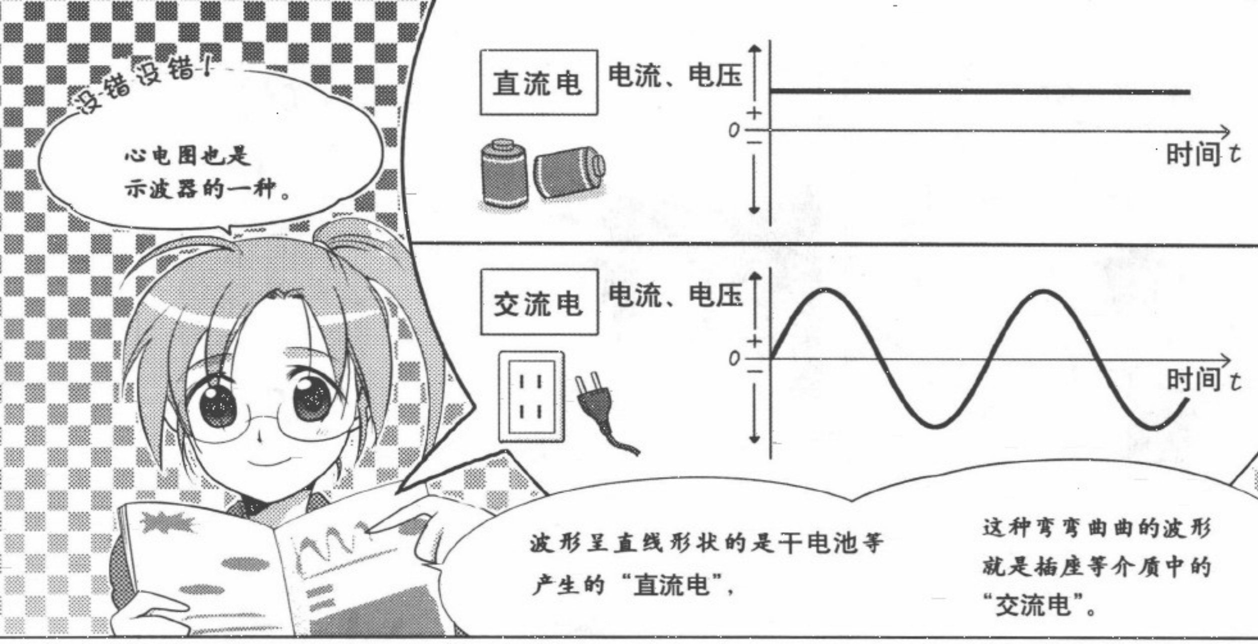
电源的电压 = 电阻 1 的电压 = 电阻 2 的电压

这里所提到的基础知识都非常重要，所以
一定要牢牢记住哦。

2 什么是交流电

直流电和交流电





直流电
- 直流电流 … I
- 直流电压 … V

交流电
- 交流电流 … i
- 交流电压 … v

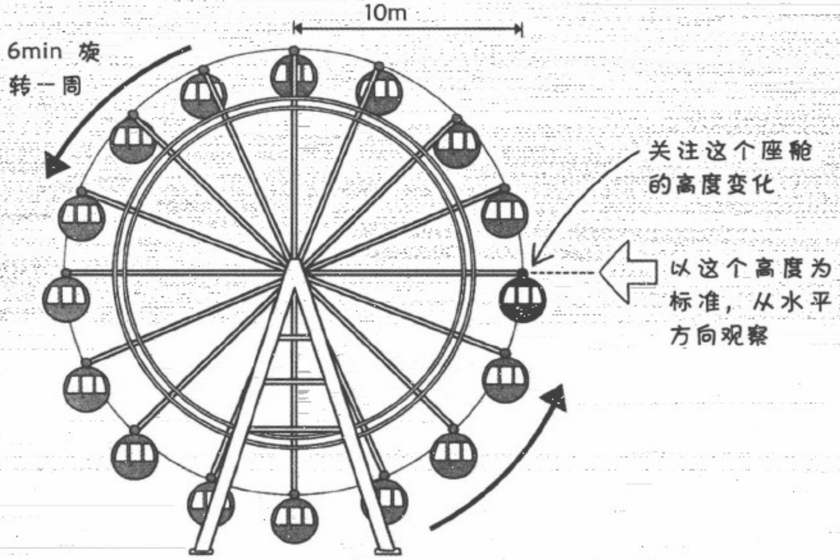

请稍等一下，我在手机里记下……哎呀！
？
怎么了？
手机没电了……
我把充电这回事儿忘得一干二净了……
啊——！
对了，这里是可以充电的，请在这里充吧！
充电器
对不起啊……
嗯？
这明显是展览用的插座吧？
是的，说的没错。
这种手机和游戏机的充电器也被称作AC适配器，对吧？
其实这个AC就是交流电的意思。
哪！
插座
AC（交流电）
DC（直流电）
输送到电子产品中
家用电器多数都使用直流电，所以，这个把插座中的交流电（AC）转换成直流电（DC）的AC适配器起着非常重要的作用。

来看看摩天轮吧


对了，青沼君还记不记得我刚开始就说过，sin、cos、tan 非常重要吗？
油腔滑调
记……记得记得！
当然还记得，那个三明治形状的！三角形的……
回答正确！
关于 sin、cos、tan 我们在高中时就学过，当时被称作三角函数，那会儿还同时学习了三角函数的图像，你还记得吗？
图、图像吗？
我投降！
啊！果然还是不记得了……
这些知识都非常重要，所以要认真复习哈！
那么，请向那座山的山顶方向观看！
嘭
哇，摩天轮？
请远眺那个摩天轮轻松愉快地转动的轨迹，然后考虑一下用图像该怎么表示！
……
这个人确实有点怪异，连联想也这么有意思……

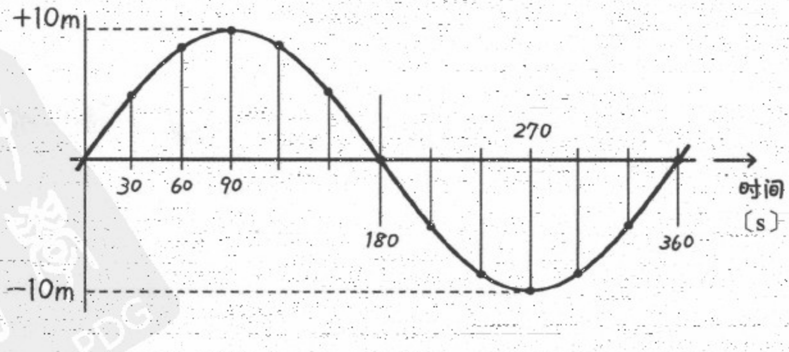
摩天轮和 sin 的图像

那个摩天轮的半径是 10m，6min（360s）旋转一周。
从现在开始我们关注那个黑色座舱的**高度变化**。
几秒钟后它将处于最高位置，几秒钟后它将处于最低位置，能看明白吗？



嗯。90s 后到达最高点，270s 后到达最低点。

回答正确！
黑色座舱的高度变化情况用图像表示的话，大概如下图所示。

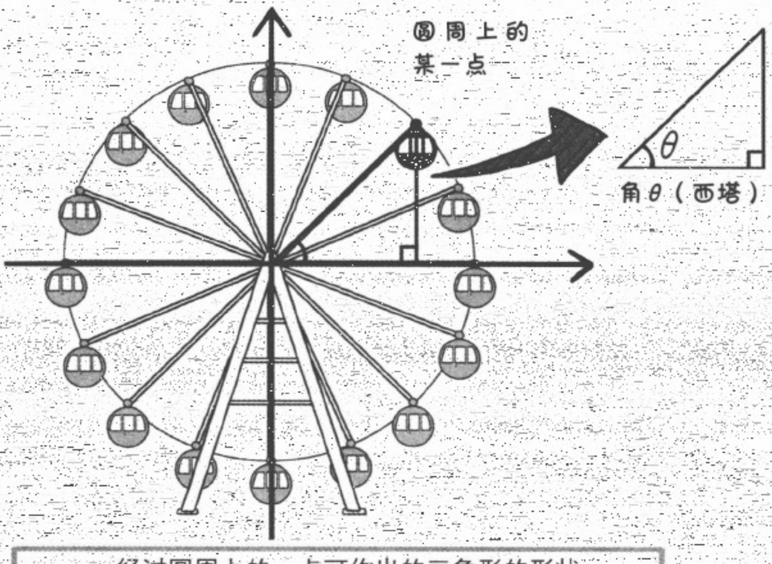


嗯，嗯。

这个波浪的形状实际上就是**三角函数** sin 的图像！
所谓函数就是**其中一个变量的数值确定后，另一个变量的数值也同时确定的对应关系。**
这个图像体现了这种对应关系的连续性。

啊，原来如此！
只要知道了时间，就能够计算出黑色座舱的高度。
相反，如果知道了黑色座舱的高度，就能够计算出所需要的最短时间。

说的没错！顺便说一句，三角函数之所以被称为三角函数……请看！



经过圆周上的一点可作出的三角形的形状。

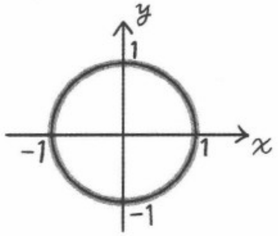
哦，原来有三角形啊！

黑色座舱旋转一周就像圆周上的某一点沿着圆周做“**圆周运动**”一样。
并且，关注圆周上的某一点，就能够作出这样的三角形。

一部分引自涉谷道雄所著的《漫画傅里叶解析》，欧姆社（2006）

单位圆和 sin 的图像

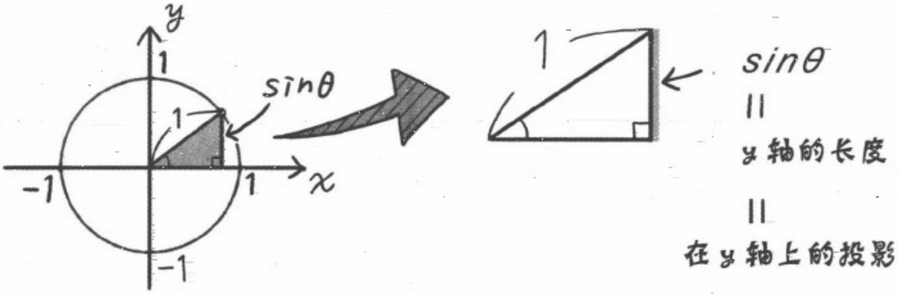
好了，摩天轮的课程就此结束了，接下来我们用“**单位圆**”来分析 sin 的图像。



要点 1

半径为 1 的圆被称作**单位圆**。因为单位圆这个概念非常简单方便，所以在分析角度和波浪的形状时被当作标准。

就像座舱旋转那样，请把圆周上的点看做正在沿着圆周做**圆周运动**的点。然后，请关注圆周上的某一点，并尝试作出三角形。



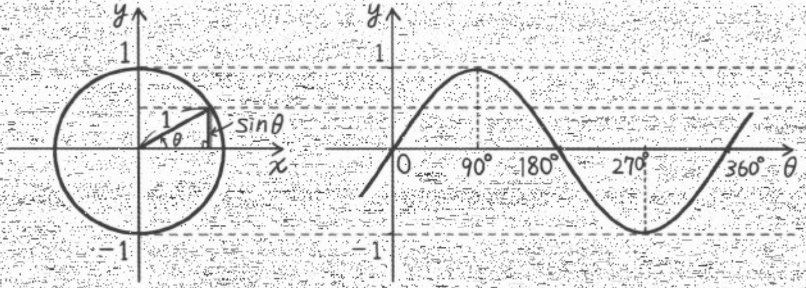
接下来，请对比一开始我们讲过的 sinθ 的定义来进行分析思考。
（请参考序章第 11 页）

啊，啊！三角形的高度本身就是 sinθ 的值呢。

说的太对了！也就是说，我们只要关注 *y* 轴的长度就可以了。用数学语言来表述，就是在 ***y* 轴上的投影**。

我们继续分析刚才那个摩天轮的例子，因为 360s 旋转一周（360°），那么经过 45s 后，角 θ 就是 45°，经过 90s 后，角 θ 就是 90s……时间长短和角 θ 的大小是能够转换的呢。

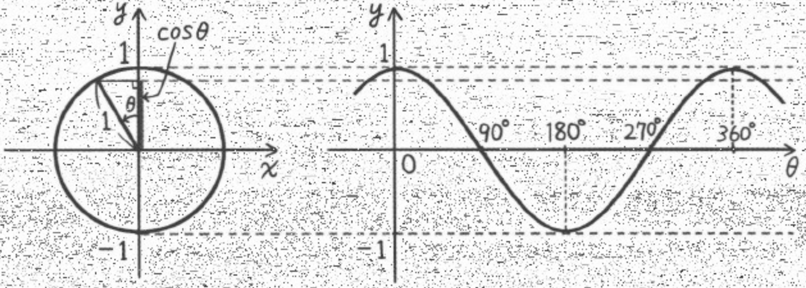
综上所述，三角函数 sin 的图像如下图所示！



$y=\sin\theta$ 的图像

啊！怎么感觉在高中时学过这些内容呢。我想起来了！

三角形的高度就是 $\sin\theta$ 的值，同理，**三角形底边的长度**就是 $\cos\theta$ 的值。关于这一点，只要回忆一下 $\cos\theta$ 的定义就能够想明白了（请参考第 11 页）。三角函数 cos 的图像如下所示：



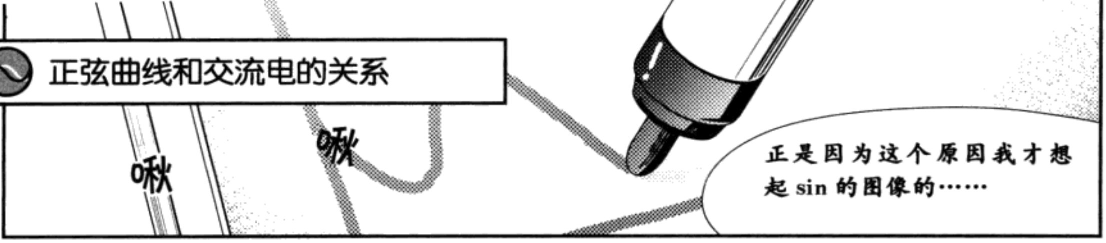
$y=\cos\theta$ 的图像

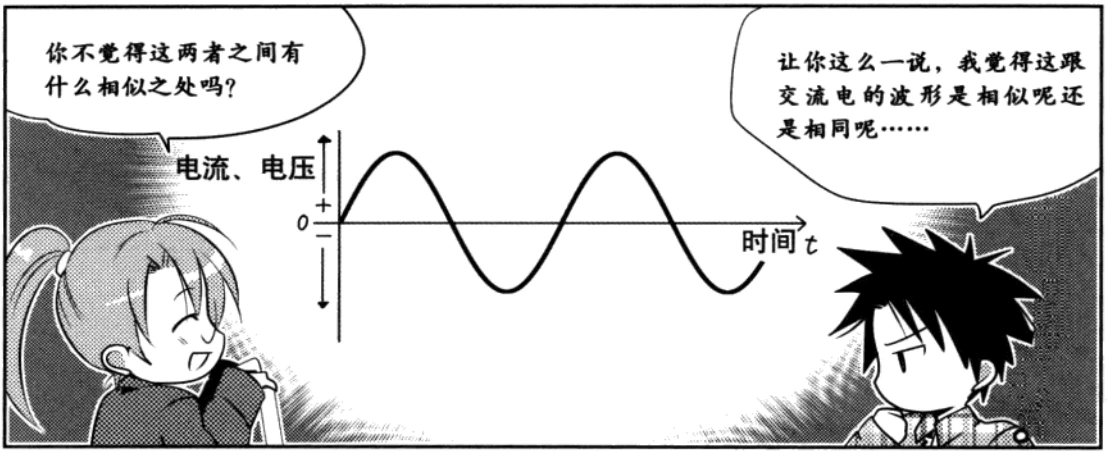
sin 和 cos 的图像形状相同，只是有着 90° 的错位啊。

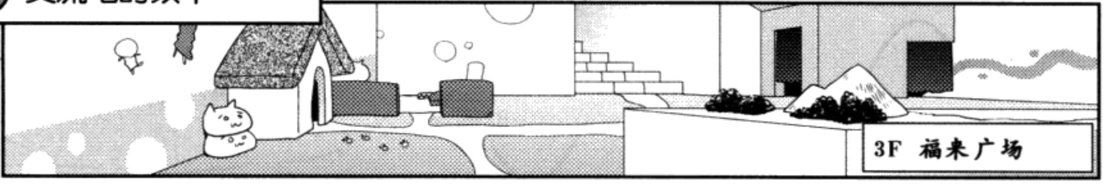
是的。三角函数不仅适用于三角形中，还跟**旋转运动和圆密切**相关，请一定要记住这一点哦。

不仅仅要想起来三明治，还要想起来摩天轮哦！

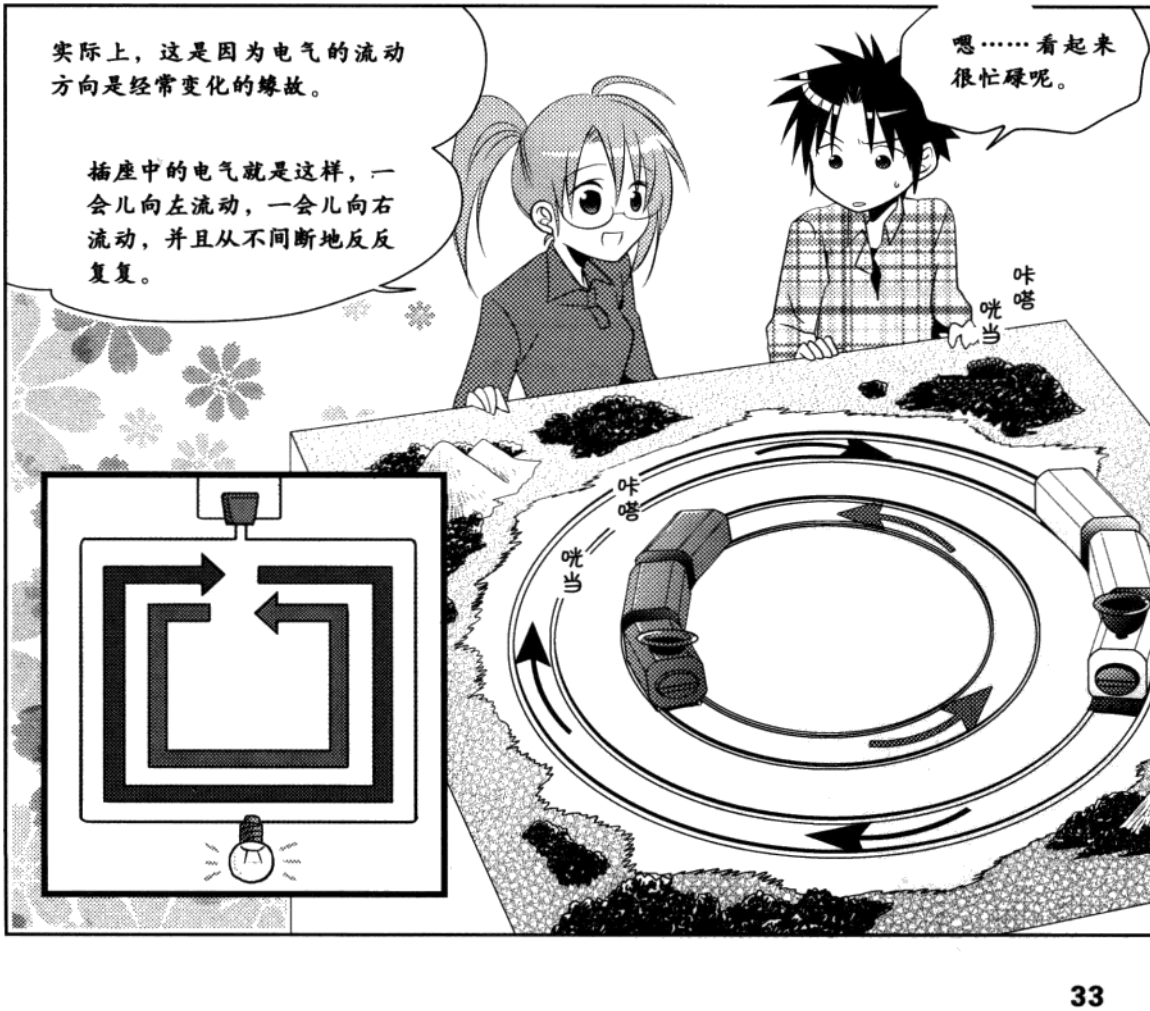
正弦曲线和交流电的关系





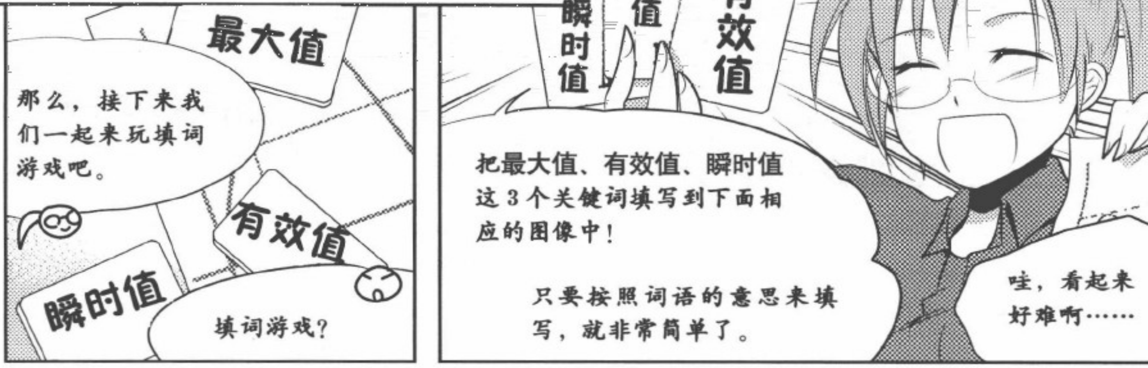

3F 福来广场

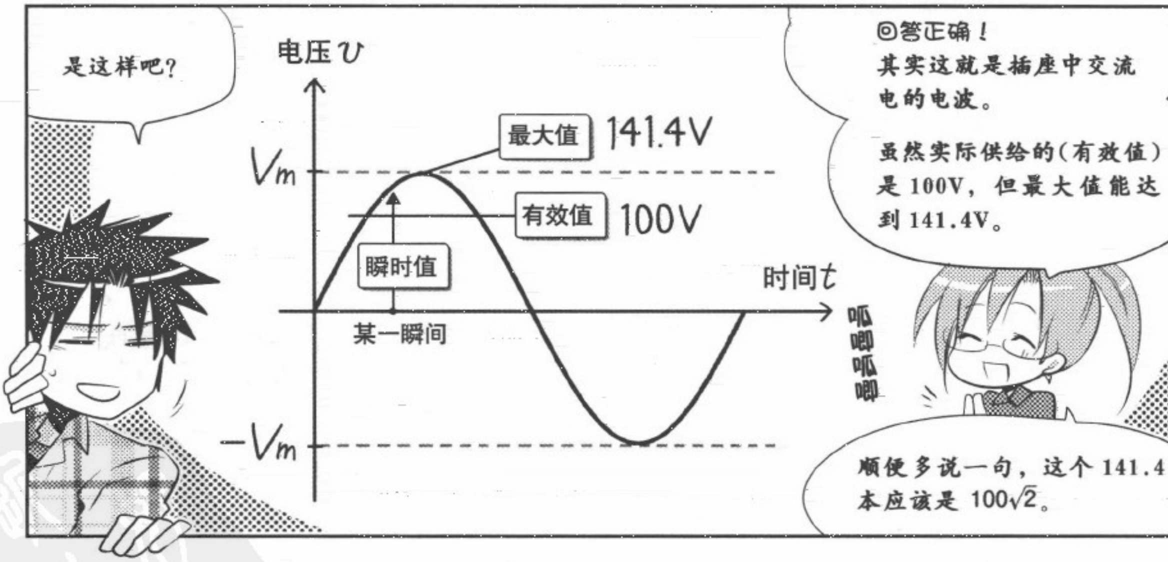

那么，接下来我们详细讲解一下交流电的相关知识。
之前说过了，在示波器上看到的交流电的波形是正电波和负电波交叉反复的结果，对吧？
噼啪
是的。


实际上，这是因为电气的流动方向是经常变化的缘故。
插座中的电气就是这样，一会儿向左流动，一会儿向右流动，并且从不间断地反反复复。
嗯……看起来很忙碌呢。
咔嗒咣当
咔嗒
咣当

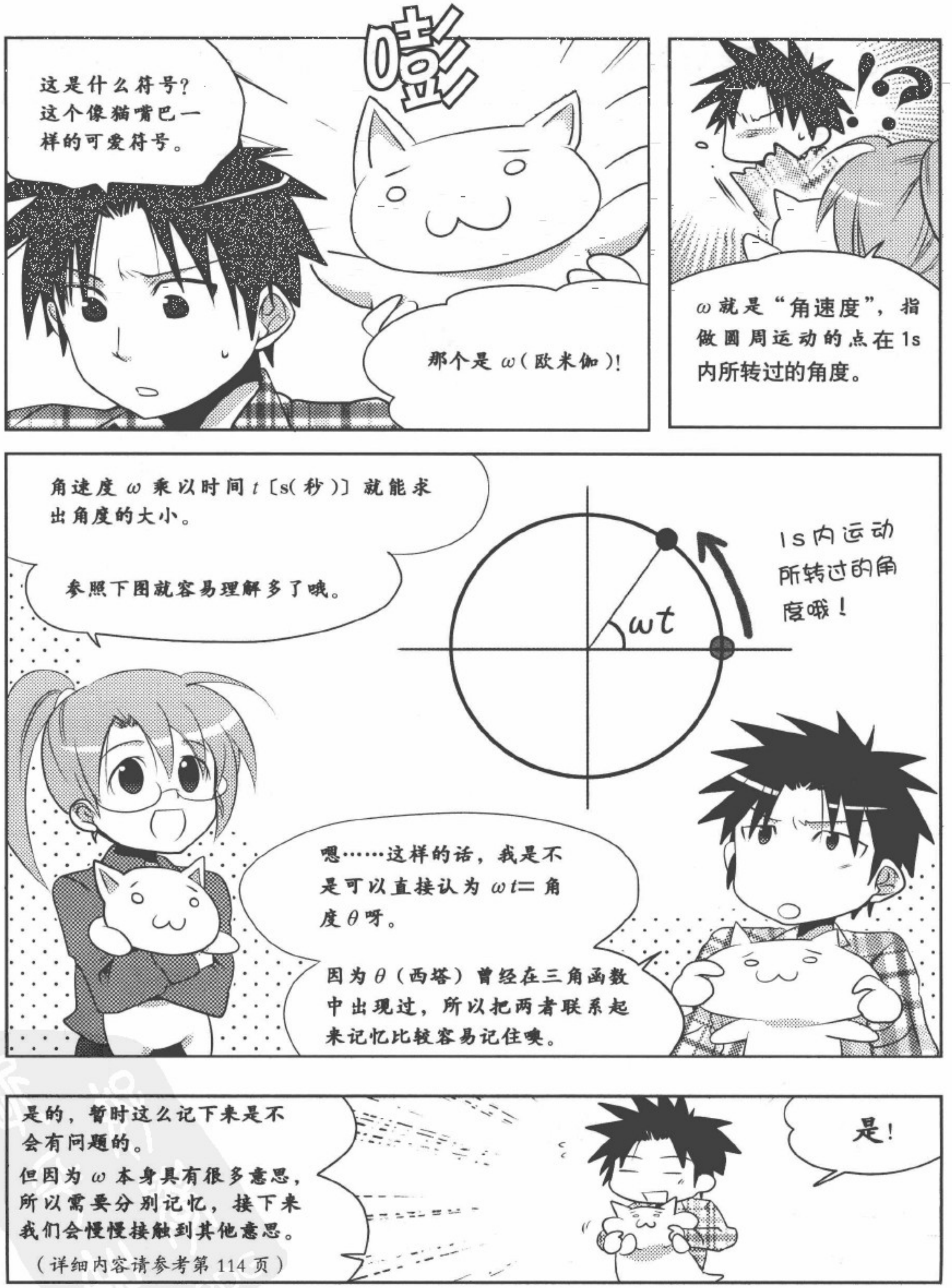

电流、电压
+
0
−
时间 t
1周期
一个波浪被称作“1 周期”。
这样的波浪在 1min 内重复出现的次数，就是“频率”。
频率用符号 f 来表示，单位是 Hz（赫兹）。
频率 赫兹
f〔Hz〕
赫兹……
赫兹这个词儿倒是经常听说……
虽然并不知道是什么意思，但好像是电化产品的这里的还是那里的什么……
?
啊，说的没错。关东地区和关西地区电能的频率是不一样的！
说到这里就不得不提及日本刚开始发电时的一些轶事了。1897 年，关东地区从德国进口了发电机，关西地区却于第二年从美国进口了发电机。
这一事件的影响一直延续到了今天，虽然同是日本国内，关东地区和关西地区电能的频率却不一样。
关西 60 HZ
关东 50 HZ
之所以不能够全国统一，都是因为我们电力公司不够努力。
给您添麻烦了，真抱歉！
深深地
别别别别别！我可没有这个意思……

交流电的最大值、有效值、瞬时值





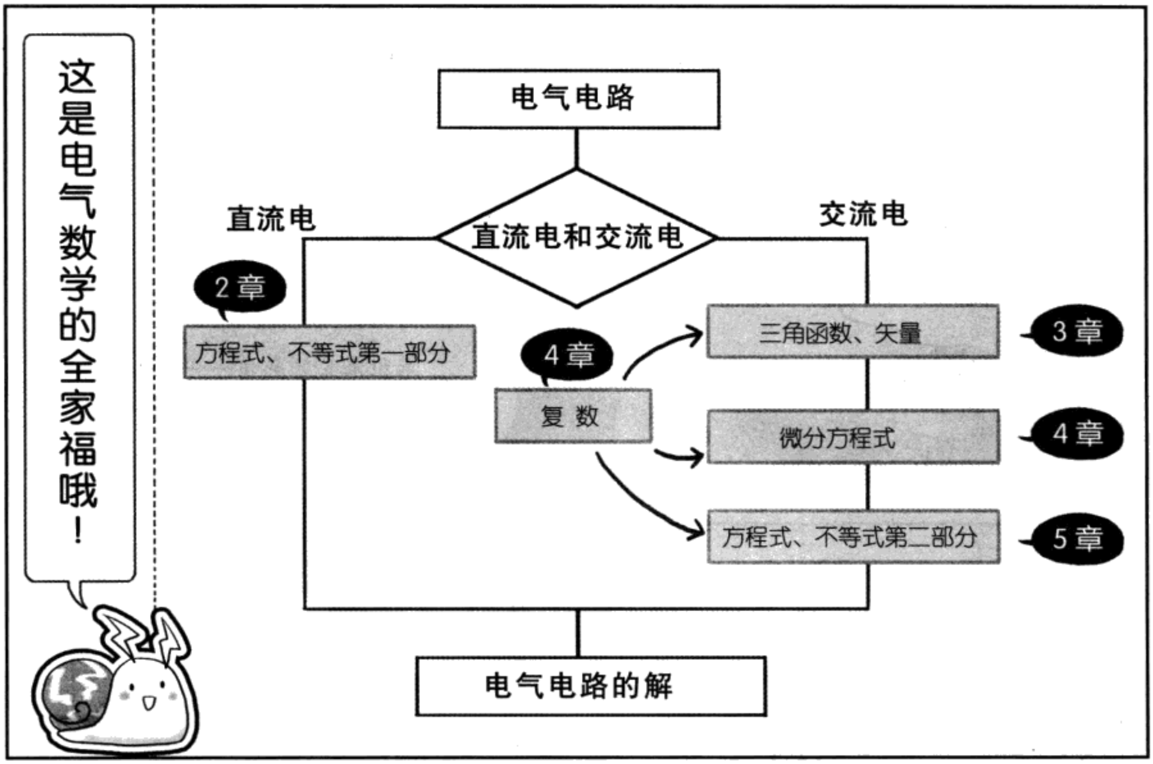
用 sin 的公式来表示交流电看看


这是什么符号？
这个像猫嘴巴一样的可爱符号。
嘭
那个是 ω（欧米伽）!
ω 就是“角速度”，指做圆周运动的点在 1s 内所转过的角度。
角速度 ω 乘以时间 t〔s（秒）〕就能求出角度的大小。
参照下图就容易理解多了哦。
ωt
1s 内运动所转过的角度哦！
嗯……这样的话，我是不是可以直接认为 ωt= 角度 θ 呀。
因为 θ（西塔）曾经在三角函数中出现过，所以把两者联系起来记忆比较容易记住噢。
是的，暂时这么记下来是不会有问题的。
但因为 ω 本身具有很多意思，所以需要分别记忆，接下来我们会慢慢接触到其他意思。
（详细内容请参考第 114 页）
是！

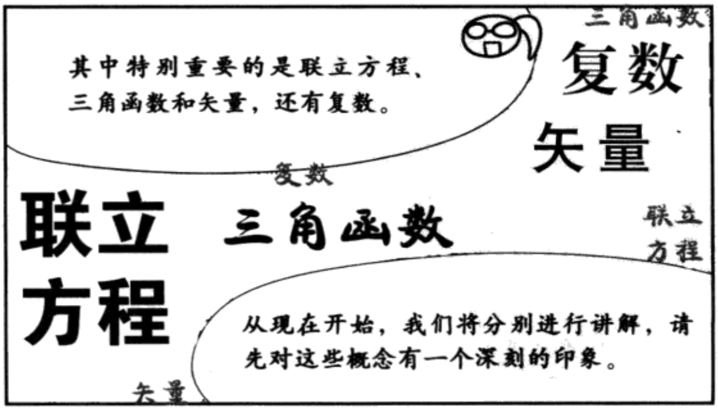
3 电气数学中所必不可少的数学知识有哪些

所需要的数学知识全家福


直流电
交流电
关于这个问题，在此特别说明下，电气数学从宏观上大概可以分为两大块，一个是“直流电问题”，另一个是“交流电问题”。
这两者对数学知识的要求也各不相同，我试着总结了一下，大概如下所述。


这是电气数学的全家福哦！
电气电路
直流电和交流电
直流电
交流电
2章
方程式、不等式第一部分
4章
复 数
三角函数、矢量
3章
微分方程式
4章
方程式、不等式第二部分
5章
电气电路的解

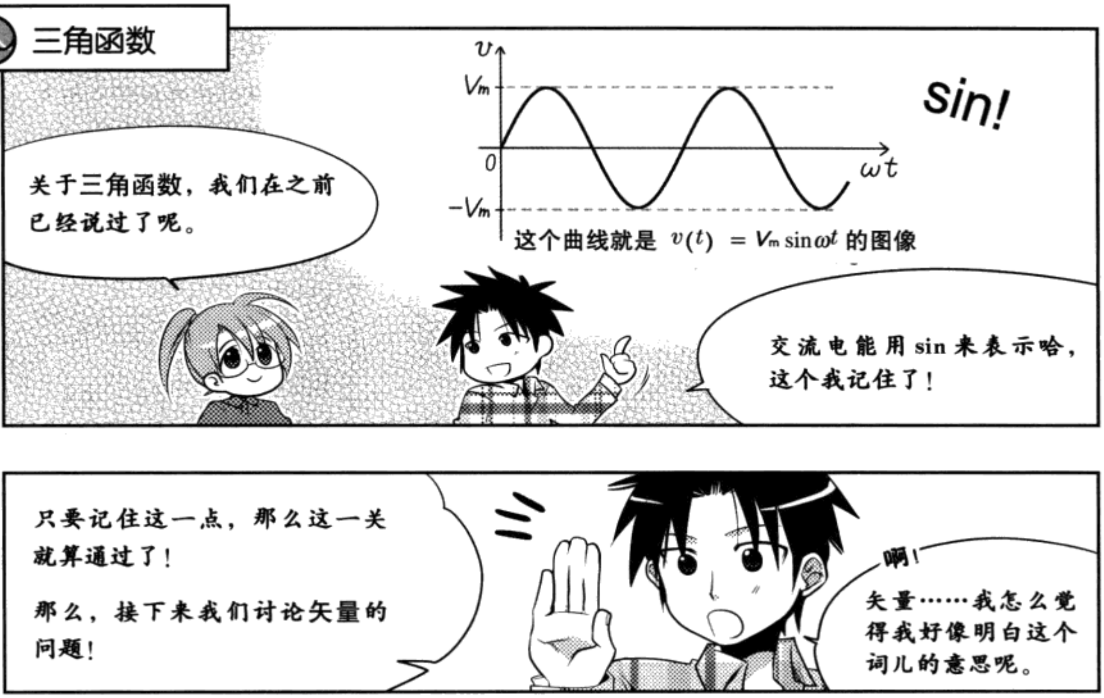

哇，有这么多呢。


其中特别重要的是联立方程、三角函数和矢量，还有复数。
三角函数
复数
矢量
复数
联立方程
三角函数
联立方程
从现在开始，我们将分别进行讲解，请先对这些概念有一个深刻的印象。
矢量

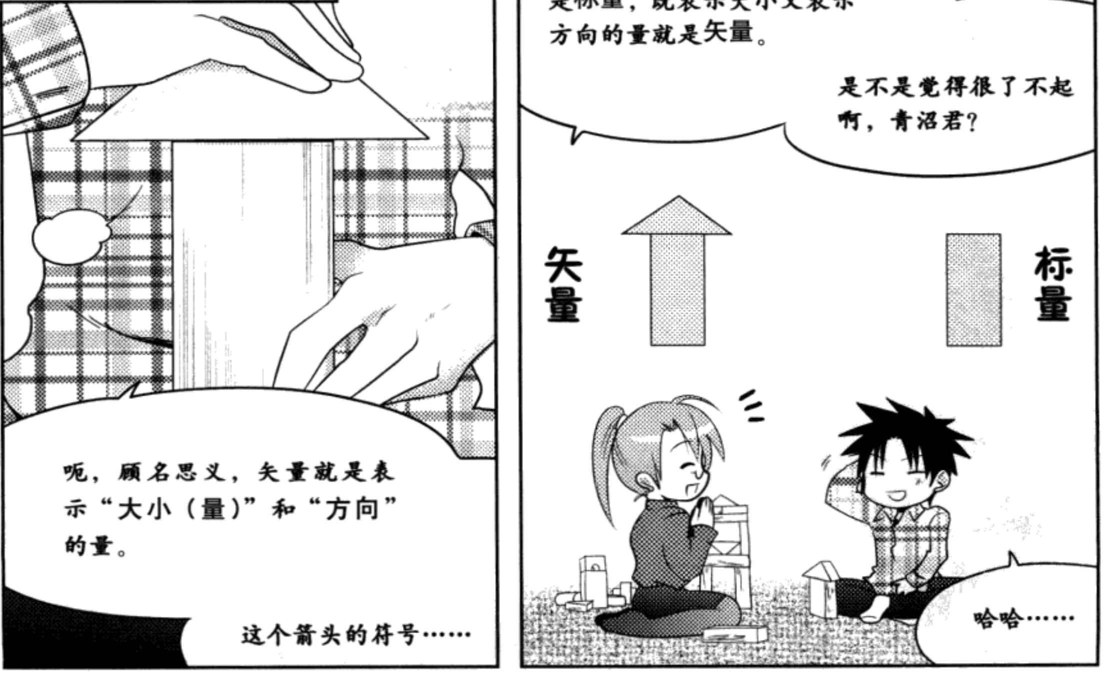
联立方程


哎呀，青沼君，终于出现了一个让人怀念的关键词，
联立方程你还记得吧？
$3x+y=5$
$-x+2y=-4$
联立方程！真令人怀念……
从中学时代就开始了，一直到现在，都行进在马马虎虎地求解联立方程的大道上呢。
都是些让人心情不爽快的回忆。
解开联立方程，就能够求出 x 和 y 等“未知的数值”的值。
求出未知的数值——未知数的值，这是联立方程所不可或缺的组成部分。
电流 I
电阻 R
电压 V
例如，在电气数学中，电流 I、电压 V、电阻 R 的数值经常被设定为未知数。
当然需要通过联立方程来求取这些未知数的值。
太棒了！
淡定，淡定……

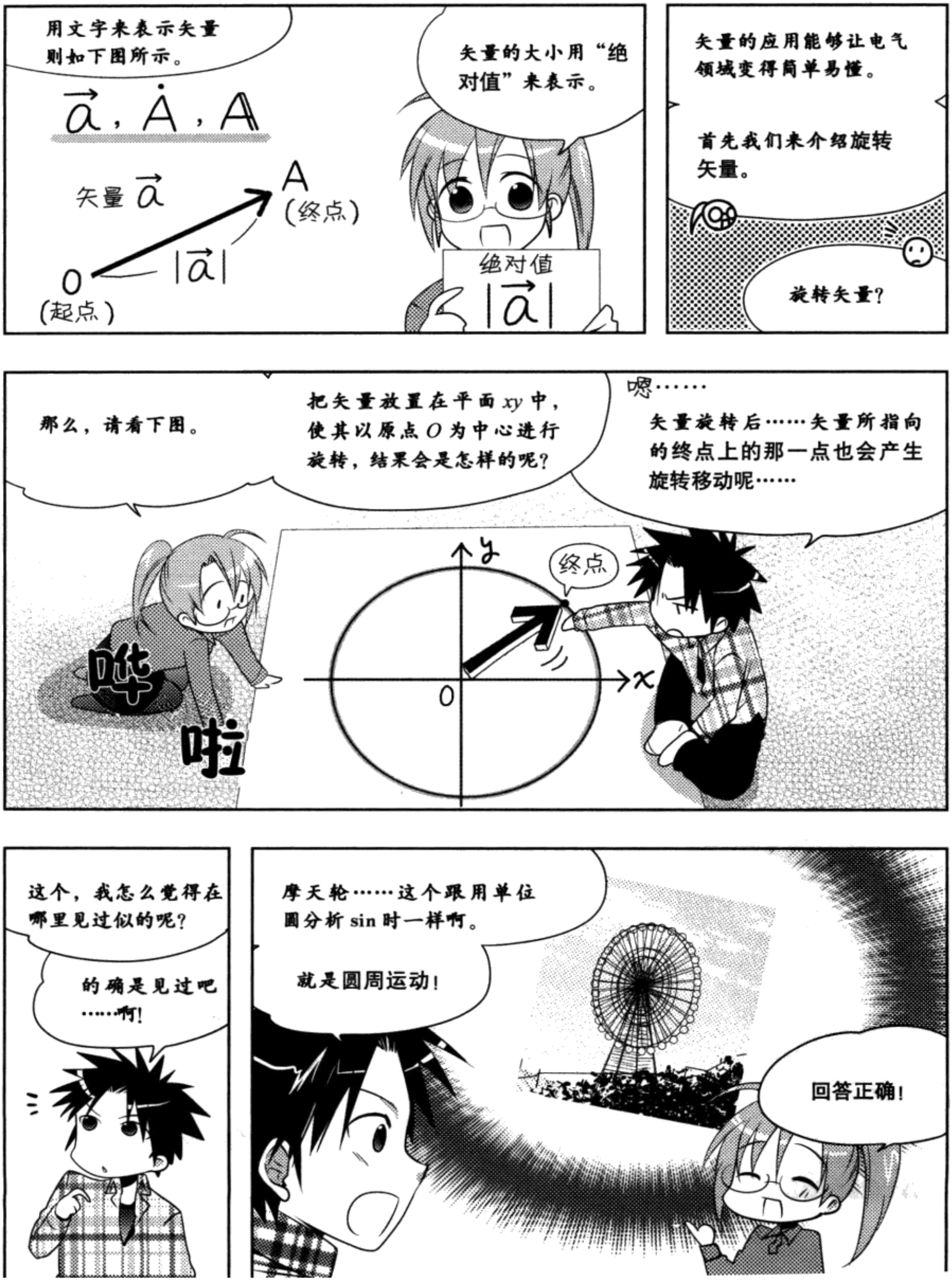
三角函数

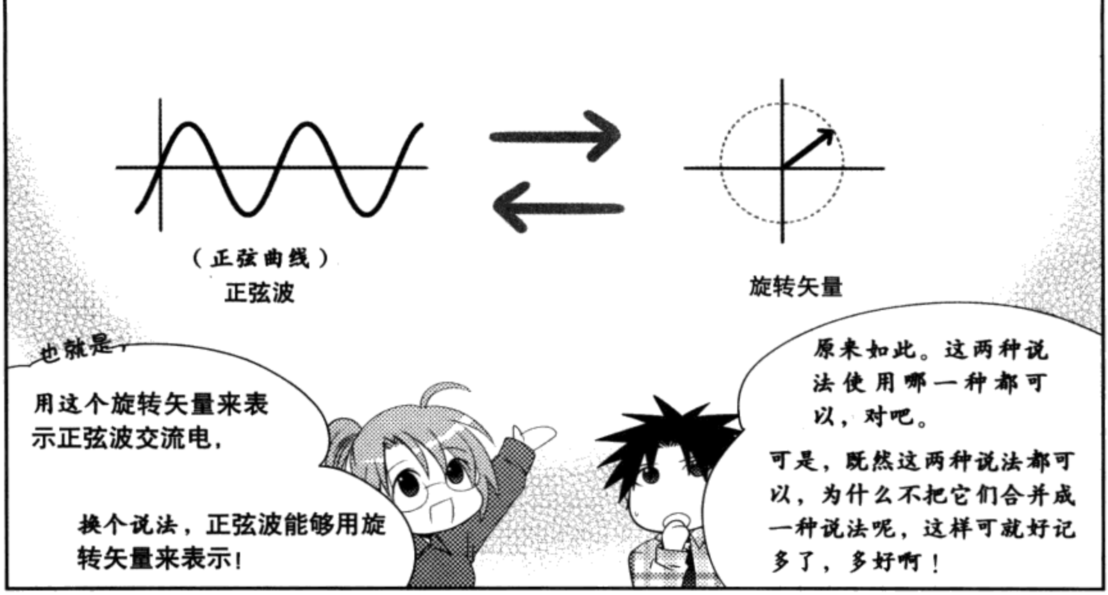

关于三角函数，我们在之前已经说过了呢。
v
V_m
0
$-V_m$
ωt
这个曲线就是 $v(t) = V_m \sin\omega t$ 的图像
sin!
交流电能用sin来表示哈，这个我记住了！
只要记住这一点，那么这一关就算通过了！
那么，接下来我们讨论矢量的问题！
啊！
矢量……我怎么觉得我好像明白这个词儿的意思呢。

矢量和相位

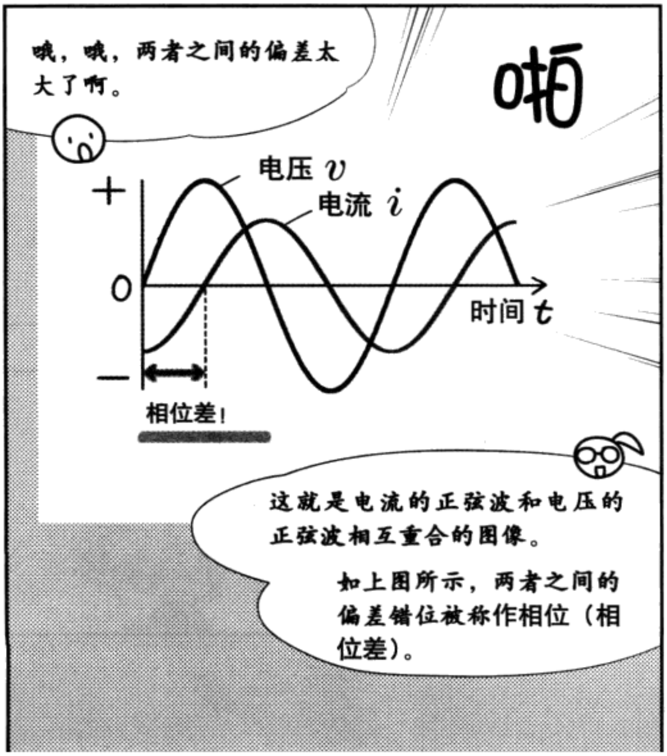

呃，顾名思义，矢量就是表示“大小（量）”和“方向”的量。
这个箭头的符号……
是的！只表示大小的量就是标量，既表示大小又表示方向的量就是矢量。
是不是觉得很了不起啊，青沼君？
矢量
标量
哈哈……

※ 本书中，矢量用 $\dot{A}$ 来表示，绝对值用 $|\dot{A}|$ 等符号来表示。

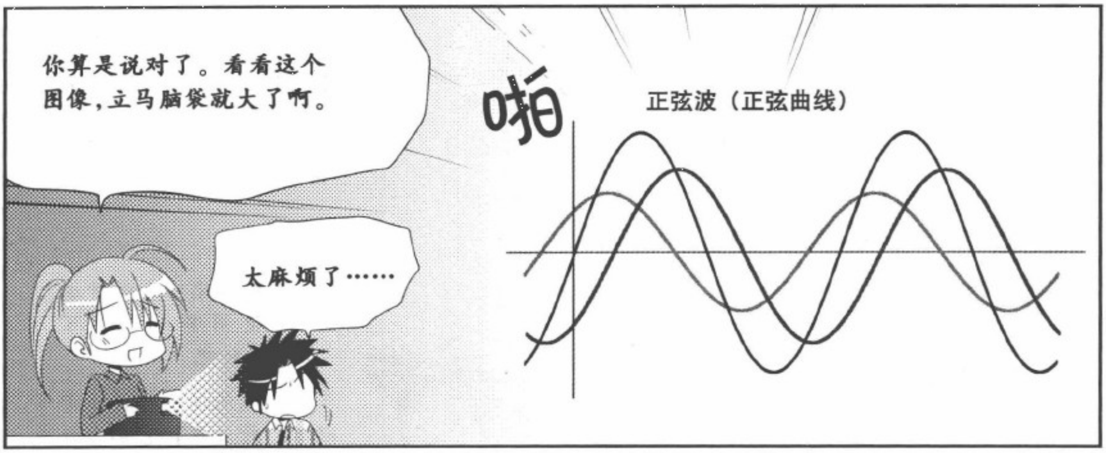


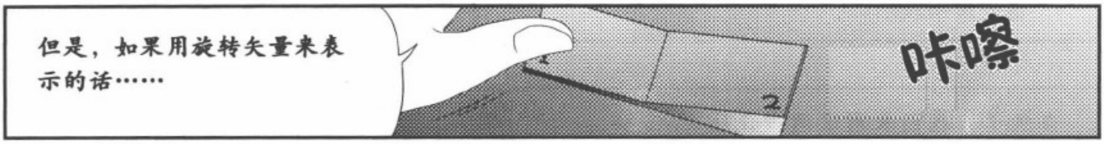

（正弦曲线）
正弦波
旋转矢量
也就是，用这个旋转矢量来表示正弦波交流电，换个说法，正弦波能够用旋转矢量来表示！
原来如此。这两种说法使用哪一种都可以，对吧。
可是，既然这两种说法都可以，为什么不把它们合并成一种说法呢，这样可就好记多了，多好啊！

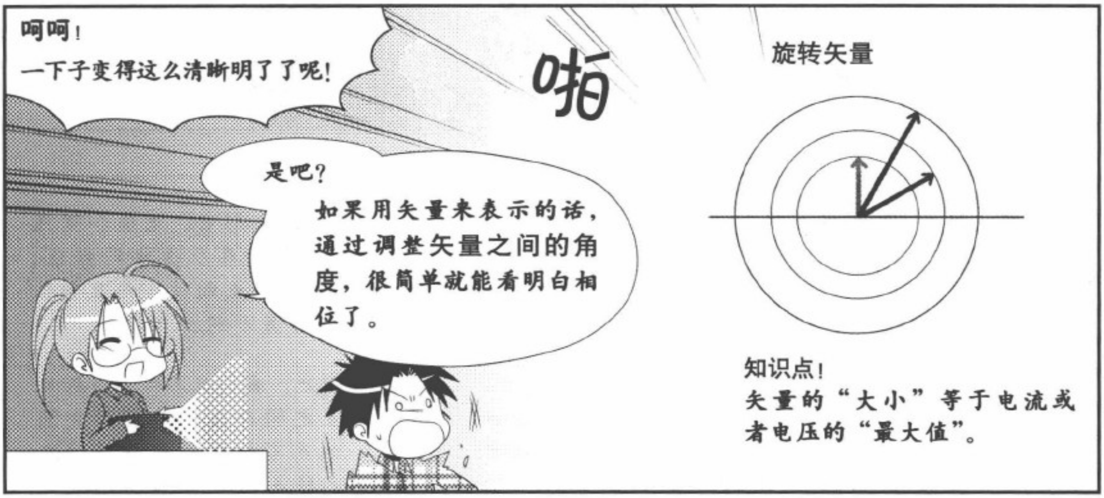

当然了，我们采用这两种说法可不是为了给自己添麻烦。
把正弦波交流电看做旋转矢量，这能够给我们带来很多便利。
投影仪？
请看这边！


哦，哦，两者之间的偏差太大了啊。
啪
电压 v
电流 i
+
0
−
时间 t
相位差！
这就是电流的正弦波和电压的正弦波相互重合的图像。
如上图所示，两者之间的偏差错位被称作相位（相位差）。


交流电的波形中，电流和电压的波形之间存在这样的错位，也就是会产生相位，而且相位差也是千差万别的。
因此，我们就不得不分析相互之间存在相位且最大值也互不相同的多个正弦波的特点。
哇啊，这可怪麻烦的啊！

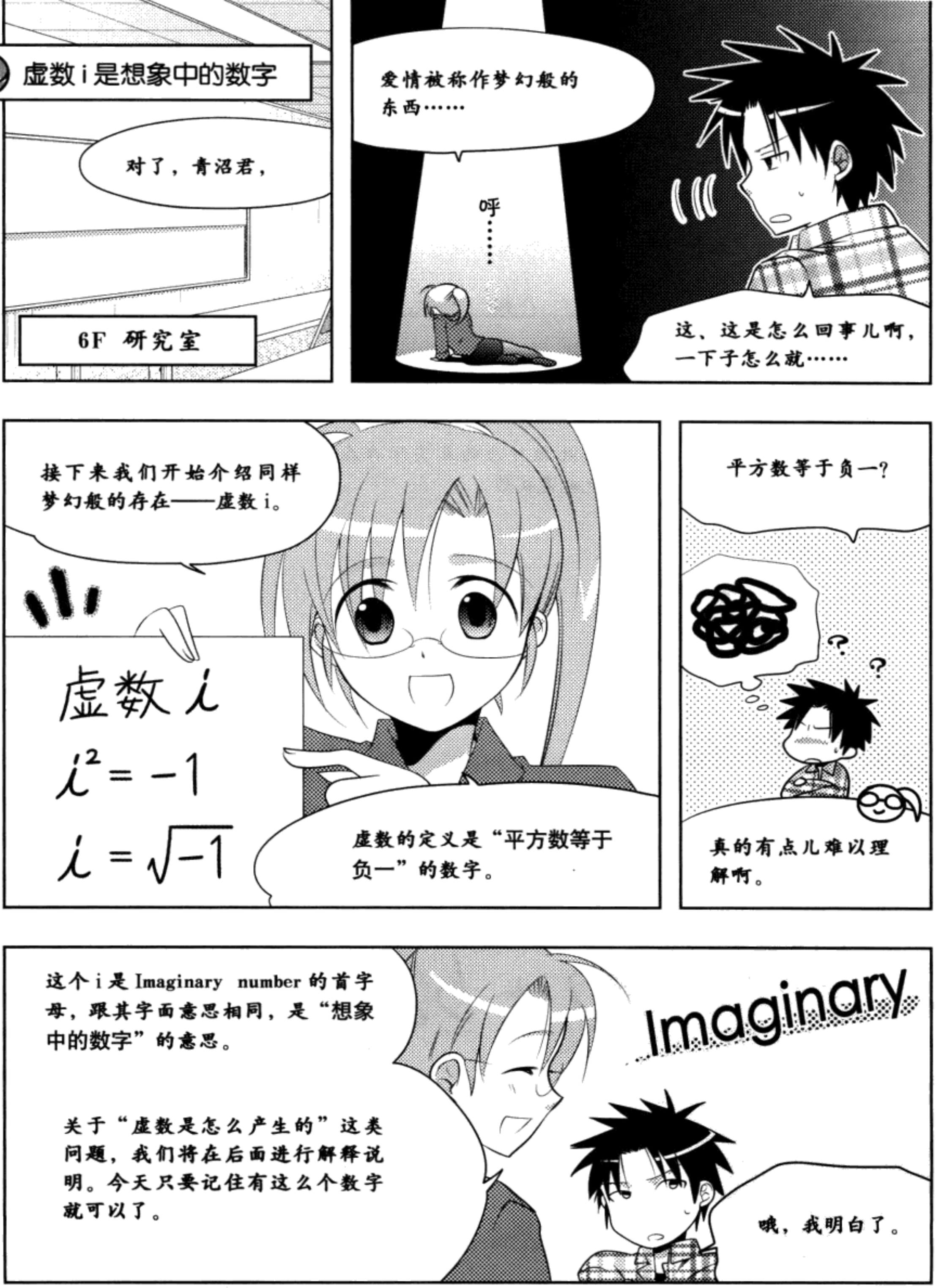

你算是说对了。看看这个图像，立马脑袋就大了啊。
啪
正弦波（正弦曲线）
太麻烦了……


但是，如果用旋转矢量来表示的话……
1
2
咔嚓


呵呵！
一下子变得这么清晰明了了呢！
啪
旋转矢量
是吧？
如果用矢量来表示的话，通过调整矢量之间的角度，很简单就能看明白相位了。
知识点！
矢量的“大小”等于电流或者电压的“最大值”。

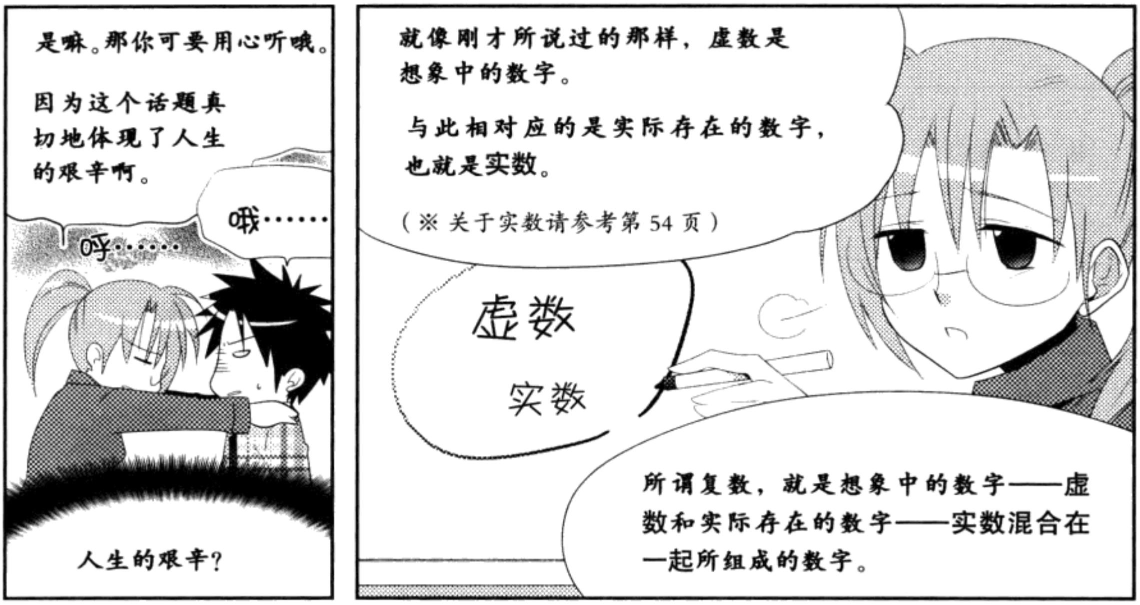

所以说，记住交流电能够用矢量来表示这一窍门，能够给我们带来很多便利呢。
矢量还有其他重要的用法，我们将在后面慢慢进行介绍！
这一点可不能忘记哦！
那个

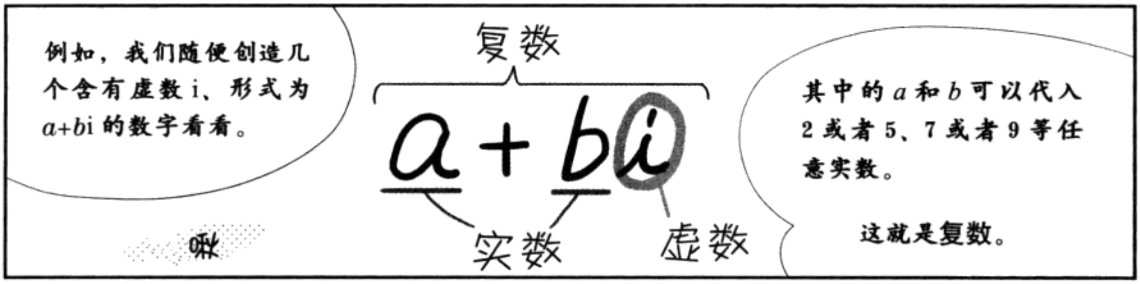
虚数 i 是想象中的数字

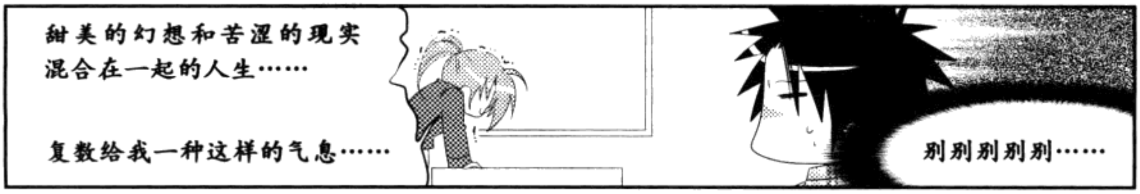


※ 关于虚数将在第 4 章进行详细说明。


介绍完了虚数 i，接下来介绍一下“复数”。
青沼君，你听说过复数这个词儿吗？
咔
复数啊，这是第一次听说呢。


是嘛。那你可要用心听哦。
因为这个话题真切地体现了人生的艰辛啊。
哦……
呼……
人生的艰辛？
就像刚才所说过的那样，虚数是想象中的数字。
与此相对应的是实际存在的数字，也就是实数。
（※ 关于实数请参考第 54 页）
虚数
实数
所谓复数，就是想象中的数字——虚数和实际存在的数字——实数混合在一起所组成的数字。


例如，我们随便创造几个含有虚数 i、形式为 a+bi 的数字看看。
复数
a+bi
实数
虚数
啾
其中的 a 和 b 可以代入 2 或者 5、7 或者 9 等任意实数。
这就是复数。


甜美的幻想和苦涩的现实混合在一起的人生……
复数给我一种这样的气息……
别别别别别……


在这里需要特别注意的是虚数部分。
这个虚数 i 在数学上是这样定义的，但在电气领域，i 可是被确定为交流电流的表示符号啊！
你这么一说我也想起来了！
因此，在电气领域，虚数单位不用符号 i(ai) 来表示，而是用符号 j(zhei) 来表示。
这么说来，在电气的世界中，爱（ai）这个东西也不是虚幻的啦！
j
哈 哈 哈 哈
身份不明的、魔幻一般的 j！多帅！
因此，刚才的那个数字也不再写成 a+bi 的形式，而是 a+bj 的形式。
a 这部分被称作复数的“实部” b 这部分被称作复数的“虚部”。
之所以把 j 放在前面，主要是为了便于处理复杂的公式。在电气领域，请首先记住复数是 a+jb 的形式。
a + jb
实部(Re)
虚部(Im)
实部是 Re，虚部是 Im 啊。
那么那个是什么呢？
因为虚部是虚数，所以根据 Imaginary 虚部用 Im 来表示，
如果真是如此，那么与此相对，实部的 Re 难不成就是 Real？
说的没错！自从学习了矢量之后，青沼君的学习状态非常不错呀！
Imaginary
Real
哪里哪里，就我这个水平，还早着呢。
实际上，矢量跟这个复数也有着密切的联系。
我就直接说结论了，复数能够用矢量来表示。
接下来，我们尝试用矢量来表示这个复数 a+jb 看看吧！

复数矢量的表示方法

准备工作做得差不多了吧？
那好，从现在开始，我们尝试用矢量来表示复数 $a+\mathrm{j}b$！

第 1 步　把 $a+\mathrm{j}b$ 看做一个算式。

首先，假设有数字 z，且 $z=a+\mathrm{j}b$，这就组成了一个算式。

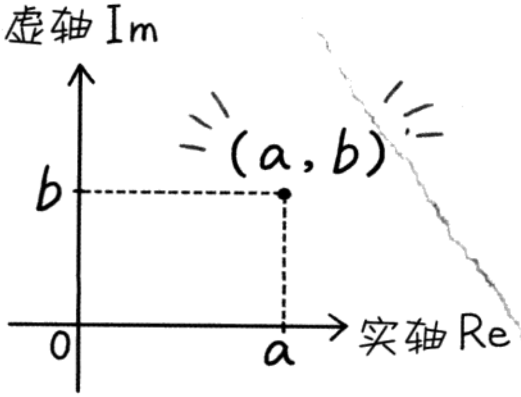
嗯嗯。
因为这个算式是实数和虚数混合组成的，所以毫无疑问，这个算式也是个**复数**。

第 2 步　准备一个复数平面（高斯平面），在这个平面上分析点的性质。

为了用矢量表示复数，就不得不借助复数平面这个平台。所谓**复数平面**，指的是横轴为**实轴（实数轴）**、纵轴为**虚轴（虚数轴）**的 xy 平面，简称复平面。
总之，复数平面就是横轴是 Re（实部）、纵轴是 Im（虚部）的平面。

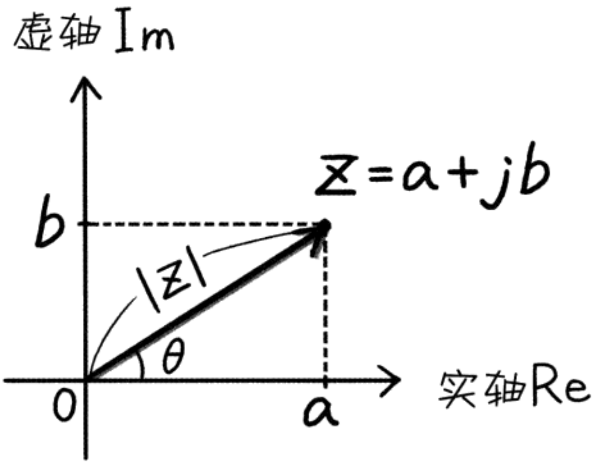
哎！
这样的话，我们就能够把 $a+\mathrm{j}b$ 中“a 和 b 的值”分别在数轴上标注出来了啊。

说的太对了！也就是说，我们可以把**复数**看做**复数平面上的一个点（a,b）**。



第3步 在复数平面上表示矢量。

接下来，我们在复数平面上表示以原点 *O* 为起点并指向某一点的矢量！
这就是“**复数矢量**”，叮咚！

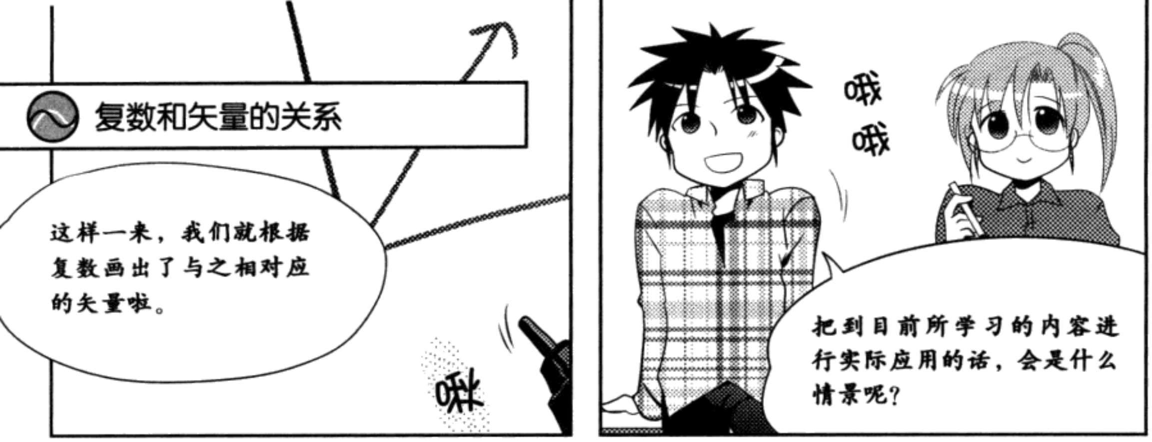


用矢量来表示复数的图像如上图所示。

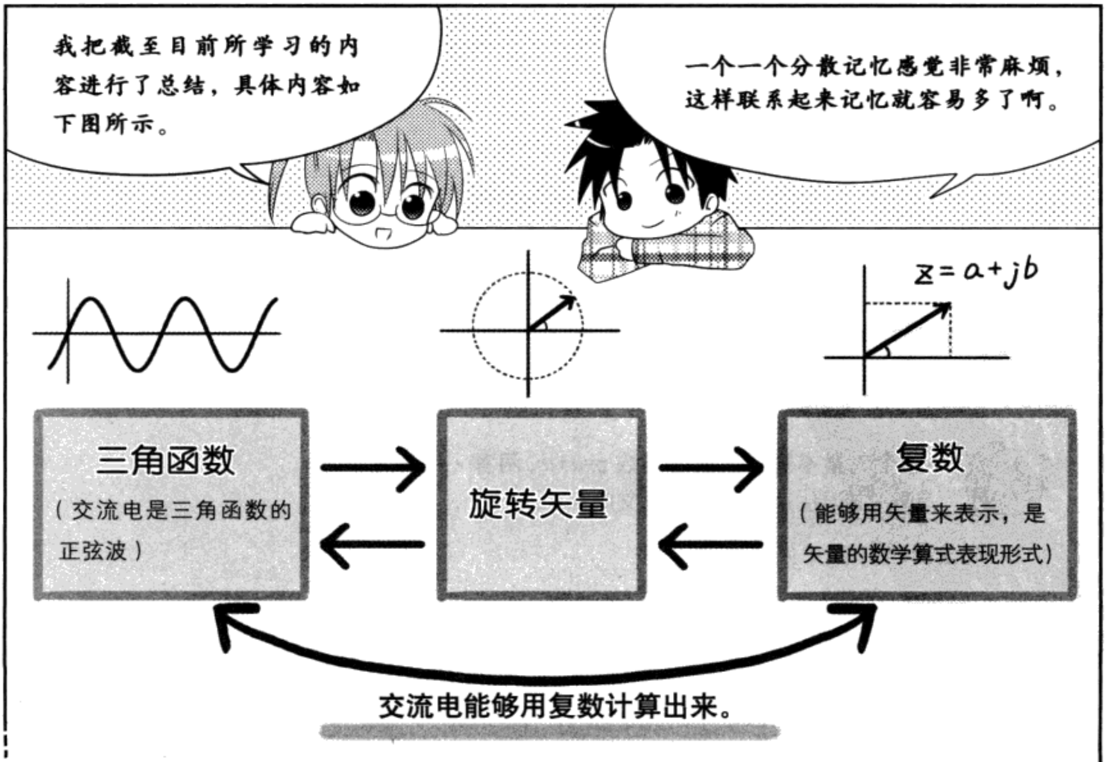
哦哦哦！确实能用矢量来表示呢。
一看这个矢量，角度（表示方向）和大小就能一目了然了。

这个矢量本身就代表了复数 $z=a+jb$, 两者一一对应。
请一定记住这个图像的意义哈！

复数和矢量的关系


这样一来，我们就根据复数画出了与之相对应的矢量啦。
啾
哦哦
把到目前所学习的内容进行实际应用的话，会是什么情景呢？


也就是说，复数能够用矢量来表示。
反过来说也成立，复数是矢量的数学算式表现形式！
可以这么进行总结吧？
是的，总结得非常好！
自然，这个矢量也能够进行旋转运动，也是旋转矢量。


我把截至目前所学习的内容进行了总结，具体内容如下图所示。
一个一个分散记忆感觉非常麻烦，这样联系起来记忆就容易多了啊。
z = a + jb
三角函数
（交流电是三角函数的正弦波）
旋转矢量
复数
（能够用矢量来表示，是矢量的数学算式表现形式）
交流电能够用复数计算出来。


这么说来的话，所谓电气数学，就是“为了更好地了解电气”而借助数学这一工具进行研究的学问呐。
矢量和复数都不过是这些工具中的一种罢了，对吧？
是的。我们用矢量或者复数来表示交流电，就能够让交流电简单易懂，而且还能够很方便地进行计算。
本来不得不用复杂难懂的微分、积分以及微分方程进行计算的数学问题，如此一来便可以避免了，省了我们很多麻烦呀。
唉！
复数
微分方程
如果能选择所要走的路，当然会选择阳光大道啦。
呵呵，就是这么回事儿！
啊……糟了，闭馆时间已经过了！
咦？
对不起，这里还没有电梯！
不快点出去的话，会被骂的呀！
不能自由选择道路，还真是让人头疼呢～！


可铃
可咚
嗯……
这么长时间，你辛苦了！
没……
我没关系。
咔啦
吱呀
怎么回事？
难、难道我讲的很难懂吗？
难道你是不想再让我教你了吗？
不，不是那个意思。
那……是不是我今天有什么地方很可笑？
是不是一整天我的裙子拉链都没拉上？
这种事儿的确很难开口指出来……
不、不是的！真的没有那种事！
啊啊
啊啊
不是……
难道只是……
您这么认真耐心地教了我一整天，可是我……
我连基本的感谢之意都没有表达，正为此难为情呢。
正因为性格如此，所以我连朋友都没有……
唉……真的是不擅长跟人打交道呢。
唉……
啊，这样啊！


对了，我也要跟你道歉，因为我忘记把很重要的东西介绍给你了。
咯吱咯吱
唉……
很重要的东西？
田川电力的吉祥物
小
电
小电君！
请一定要牢记在心哦！
……是。
我算是看明白了，这个孩子太内向了。
希望通过跟我多接触，能够变得稍微外向一些，阳光一些……
对了，吉祥物的名字是什么来着？
是小电君啦！

~ 数字的分类与什么是实数 ~

在学习虚数的时候，我们说过跟虚数相对的是实数。虚数是想象中的数字。与之相反，实数则是实际存在的数字。那么，实际存在的数字中，都有哪些数字呢？我把数字进行了总结归类，具体如下表所示。

复数

- 形如 $a+bi$ 的数字（在电气领域中表示为 $a+jb$）

※ a 和 b 是实数。

※ i 是虚数单位。

实数			纯虚数
有理数★		无理数	
整数 · 正整数 · 0 · 负整数	不是整数的有理数 · 像 0.3 这样的有限小数 · 像 0.3333… 这样的循环小数	· 像 π 和 2 这样的无限不循环小数	· 形如 bi 这样的数字 ※b 是非零实数。

★ 能够用 $\frac{q}{p}$（※p 是非零整数，q 是整数）这种形式表示的数字被称作有理数。整数是有理数的一种。

引自高桥信所著《漫画线性代数》，欧姆社（2008）

在数学领域，**实数**指“有理数和无理数的集合”。实数和虚数混合组成的数字就是**复数**。

我明白了，原来数字也分很多种。

第 2 章

用方程式和不等式解答电路问题

（第一部分 直流电路）

1 求解问题首先需要了解的知识

※ 日语中复习和复仇谐音。——译者注

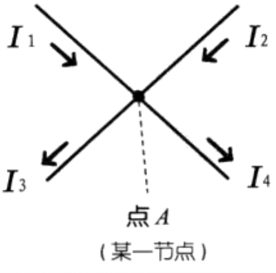
基尔霍夫第一定律


咯吱
言归正传，我们今天要学习两个非常非常重要的定律。
两个吗？
可我真的很犯愁记忆定律啊。
没关系的，青沼君，
这两个定律都非常简单。
首先请放松自己，看着这张照片，
在大脑里想象一下清澈见底的美丽小河……
是。
A
B
哗啦
哗啦
C
嗯嗯
小河A和小河B交汇后形成了小河C。
此时，小河A和B两者水量的和等于小河C中的水量，对吧？
当然相等了，中间又没有流向别的地方。

基尔霍夫第一定律（电流守恒定律）

关于流经电路中某一节点（点 *A*）的电流，流入电流的总量等于流出电流的总量。

$$I_1 + I_2 = I_3 + I_4$$

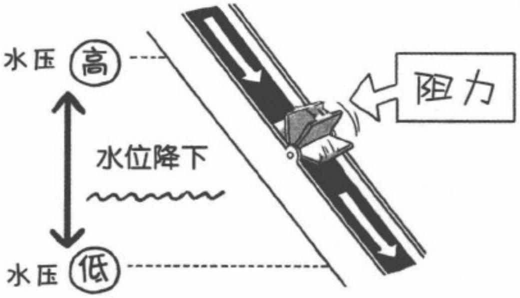


什么是电压降

在这里有个问题需要特别提醒大家注意。
关于电压，在此之前我们全部使用电压 V 来进行说明，从今往后将分成两种来进行解说，一个是**电源电压 E**，一个是**电压降 V**。

虽然 E 这个字母比较陌生，但我知道这是电压的意思，对此我没有什么疑问。
但是，这个“电压降”是什么意思？我这是第一次听说这个词儿呢。

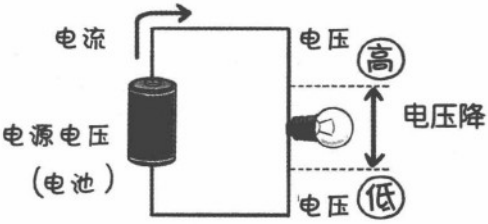
首先请看下图。我们依然用水的例子来说明电压降这个名词。



为了让水车旋转，就需要有一定的水位差（= 电气相关例子中的电压）。
而且，水车在旋转前和旋转后，水位产生了很大变化。

啊，难道在电气领域内，电压也会产生类似的变化吗？在电阻的前方电压会变高，在电阻的后方电压就变低……

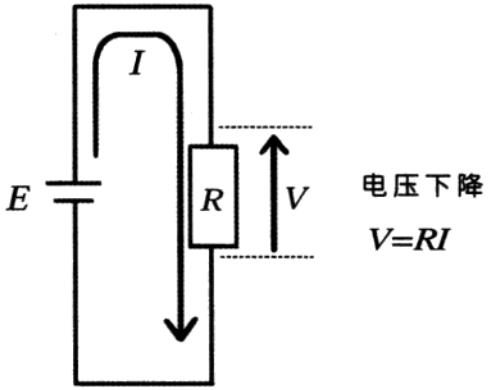
说的没错！如果用图表来表示，则具体如下图所示。



嗯嗯。**当电流流经电阻时，电阻的前方和后方会产生电压下降**的现象。

根据欧姆定律（请参考第 22 页）可知，这个电压降 V 能够通过计算公式 $V=RI$ 求得。也就是**电压降 = 电阻 × 电流。**

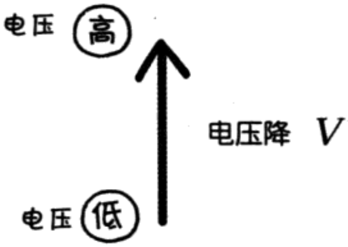
因为这个缘故，我们可以把电源电压 E 和电压降 V 用电路图表示如下。



电流流动，产生电压下降现象的示意图。

嗯，嗯，嗯？等……请稍等一下。
电压降的箭头为什么**跟电流的流向相反**呀？

关于电压这个矢量，记作从电压低的地方指向电压高的地方。



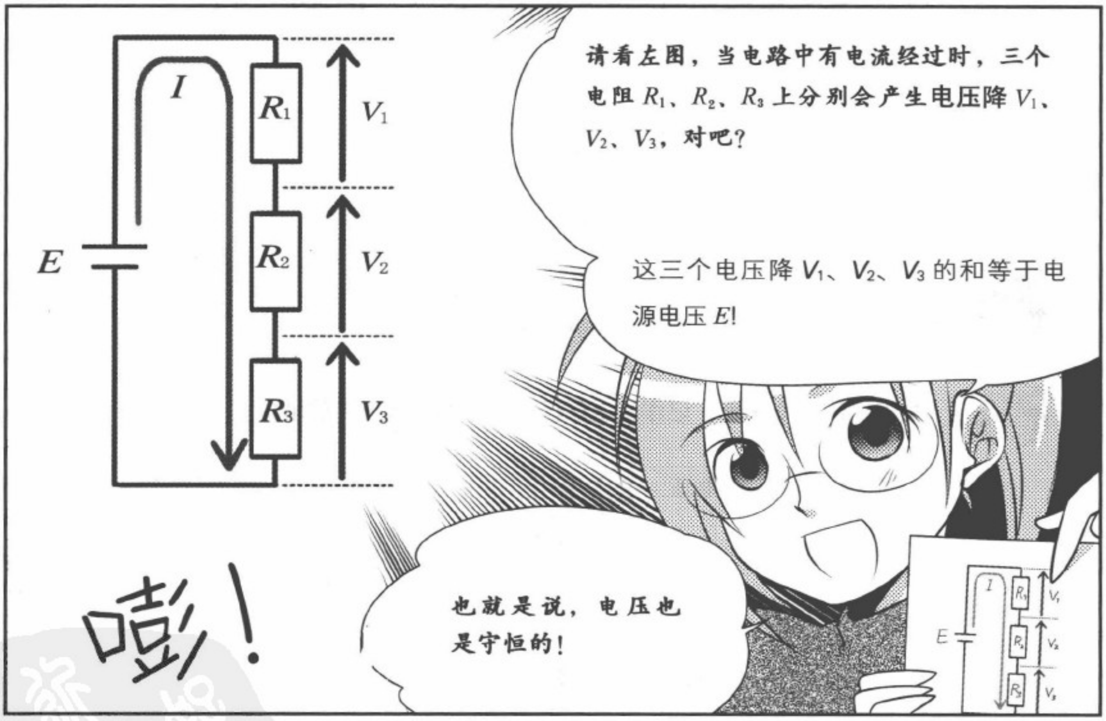
因为通过电阻后的电压相对较低，所以矢量的方向自然和电流的方向相反。这是非常重要的一个知识点，可要牢牢记在心底呀！

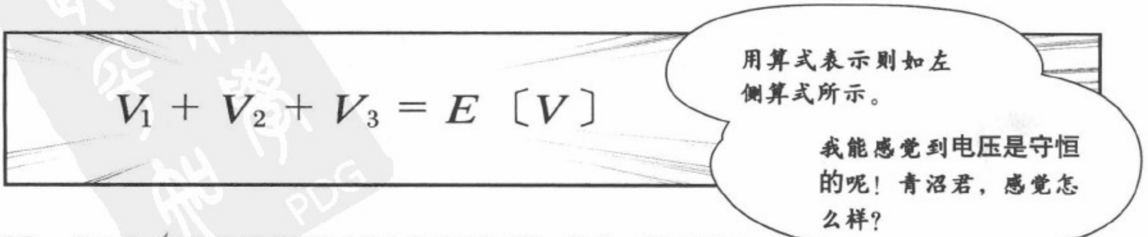
哦，哦，哦！明白了！

基尔霍夫第二定律


刚才讲了“电流守恒定律”，这次要讲什么定律呢？
电流守恒
既然有了第一定律，自然也会有第二定律。


电流已经讲过了，接下来是不是要讲电压呢？
从昨天开始就是电流和电压成对出现呢。
电流
电压
还有我，还有我
青沼君，让你猜对了！
基尔霍夫第二定律正是“电压守恒定律”。

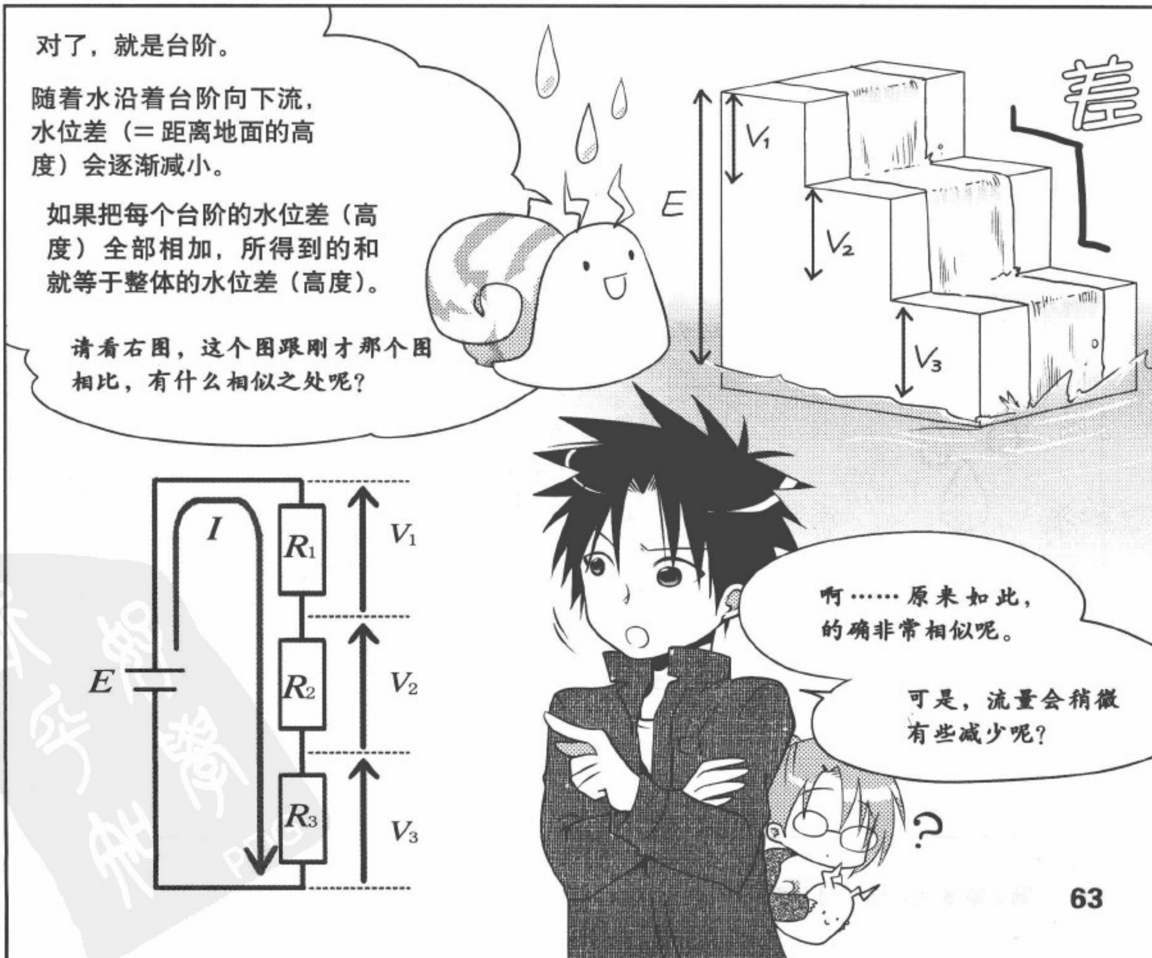

I
E
R_1
R_2
R_3
V_1
V_2
V_3
请看左图，当电路中有电流经过时，三个电阻 R_1、R_2、R_3 上分别会产生电压降 V_1、V_2、V_3，对吧？
这三个电压降 V_1、V_2、V_3 的和等于电源电压 E!
嘭！
也就是说，电压也是守恒的！

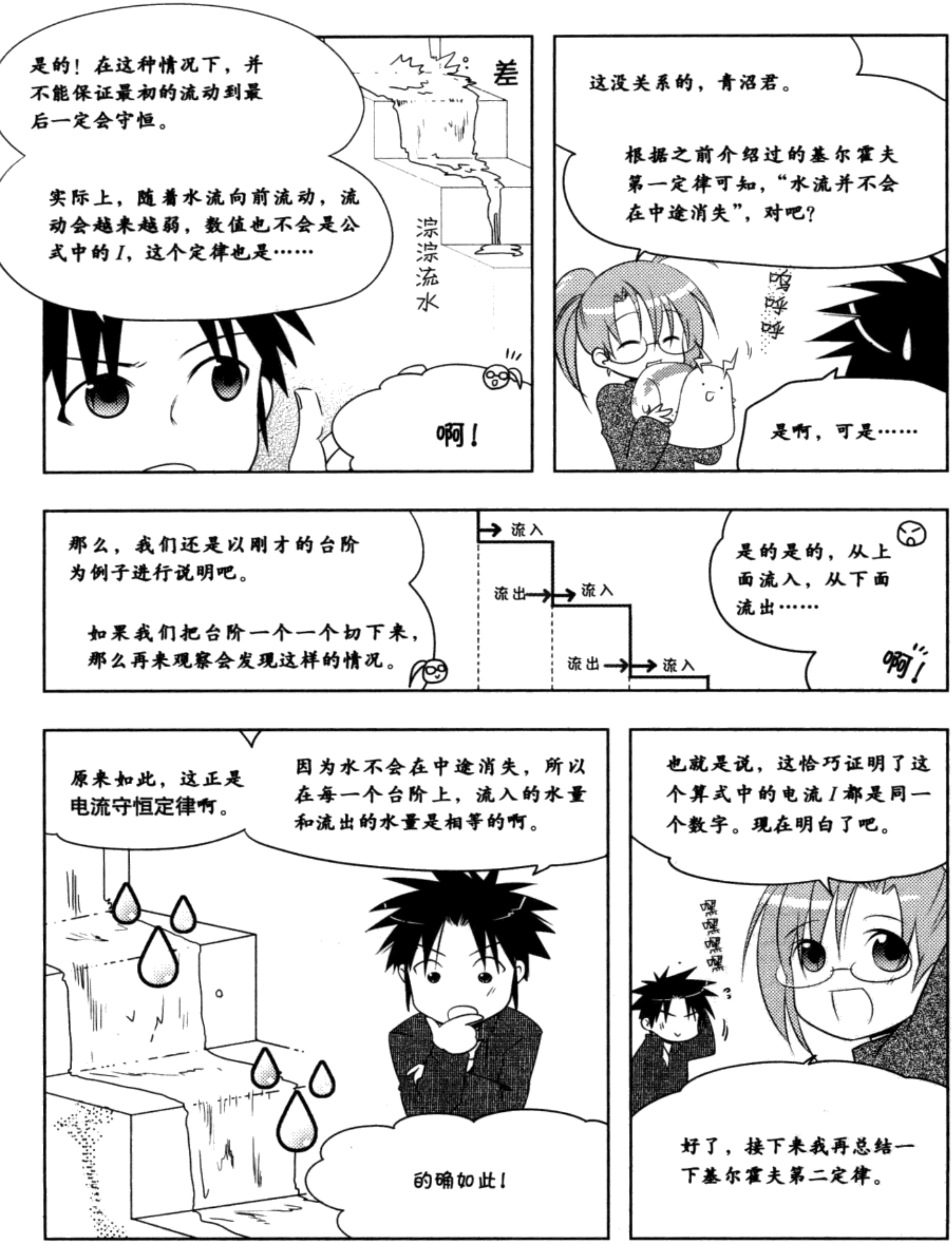

$V_1 + V_2 + V_3 = E$ 〔V〕
用算式表示则如左侧算式所示。
我能感觉到电压是守恒的呢！青沼君，感觉怎么样？


？
嗡
嗡
简直是天方夜谭!


噢，对不起啊，可能是我讲的不够清楚。
那么，我还是接着进行解释说明吧。
还真像个玩把戏的人呢！


好了，还是拿我最喜欢的水为例子来进行说明吧。
请想象一下你家里从二楼向外流水的情景。
一楼会变成什么情况呢?
嗯……
一楼啊，对了，
会从台阶上向下流水吧。

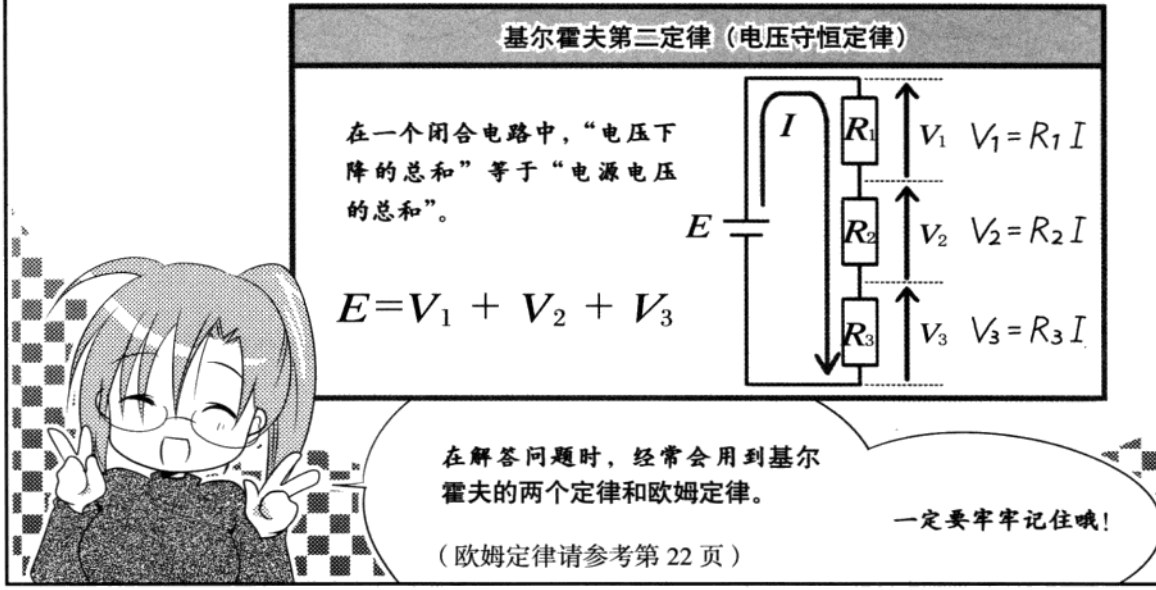

对了，就是台阶。
随着水沿着台阶向下流，水位差（= 距离地面的高度）会逐渐减小。
如果把每个台阶的水位差（高度）全部相加，所得到的和就等于整体的水位差（高度）。
请看右图，这个图跟刚才那个图相比，有什么相似之处呢?
差
E
V1
V2
V3
I
R1
R2
R3
E
V1
V2
V3
啊……原来如此，的确非常相似呢。
可是，流量会稍微有些减少呢?
?


是的！在这种情况下，并不能保证最初的流动到最后一定会守恒。
实际上，随着水流向前流动，流动会越来越弱，数值也不会是公式中的I，这个定律也是……
差
淙淙流水
啊！
这没关系的，青沼君。
根据之前介绍过的基尔霍夫第一定律可知，“水流并不会在中途消失”，对吧？
呜呼呼
是啊，可是……
那么，我们还是以刚才的台阶为例子进行说明吧。
如果我们把台阶一个一个切下来，那么再来观察会发现这样的情况。
流入
流出
流入
流出
流入
是的是的，从上面流入，从下面流出……
啊！
原来如此，这正是电流守恒定律啊。
因为水不会在中途消失，所以在每一个台阶上，流入的水量和流出的水量是相等的啊。
的确如此！
也就是说，这恰巧证明了这个算式中的电流I都是同一个数字。现在明白了吧。
嘿嘿嘿嘿
好了，接下来我再总结一下基尔霍夫第二定律。

基尔霍夫第二定律（电压守恒定律）

在一个闭合电路中，“电压下降的总和”等于“电源电压的总和”。

$$E=V_1+V_2+V_3$$



基尔霍夫第一定律是总和为零的定律

好了好了，我们还是尽快来说说这个“**总和为零的定律**”吧。
首先来说说**第一定律**。这里的说明非常简单易懂。

$I_1 + I_2 = I_3 + I_4$　　把这个算式的右边移动到左边可得

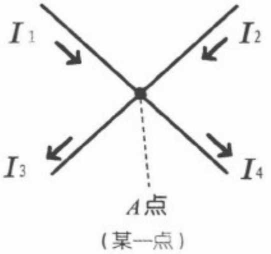
$$I_1 + I_2 - I_3 - I_4 = 0$$

啊！的确变成零了呢。

也就是说，“**电路上某一点（点 A）上的电流的总和为零**”，这样理解就比较简单易懂了。
但请你一定注意正负符号。

- 从点 A 流入的电流
  I_1 和 I_2 的符号是正。
- 从点 A 流出的电流
  I_3 和 I_4 的符号是负。

$$I_1 + I_2 - I_3 - I_4 = 0$$



原来如此。也就是说，要特意关注电流的流动方向呢。
不管怎样，**总和为零**真的很酷。

不是啊，我怎么总觉得有点儿虚无缥缈呢。

（这就是所谓的消极感！）

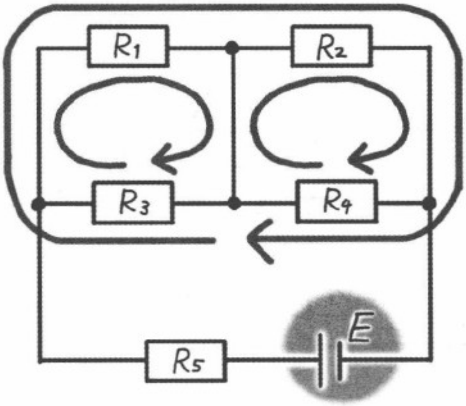
基尔霍夫第二定律是总和为零的定律

好了，请收拾一下心情，接下来我们继续讲解**第二定律**。
刚才我们讲解了**闭合电路中“电压下降的总和”等于“电源电压的总和”**。

可是，请你思考一下这种情况。
如果闭合电路中不存在电源电压的话，会是什么情况呢？

咦？这种情况我想都没想过。

例如，在下图所示的电路中，闭合电路最多能数出 7 个。
但其中有 3 个闭合电路中并没有任何电源电压。
这种情况应该怎么进行分析说明呢？



没有电源电压！

啊，该取缔吗？

扑哧！很遗憾，实际上这种情况也适用于第二定律。
“在某一闭合电路中，电压降的总和为零”成立。

哎？这种情况下的总和也是零吗？

是的！在这里，最重要的知识点也是**正和负这两个符号**的位置问题。
该怎样添加符号，我们将在下文中进行详细解说。

首先，请注意**图 a 电流的方向**。如果电流这样流动，那么很自然电压降 V 就会变成**图 b 电压降的方向**所展示的样子。

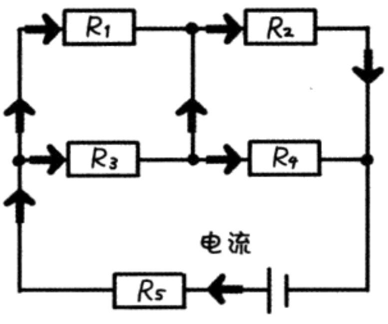


图 a　电流的方向

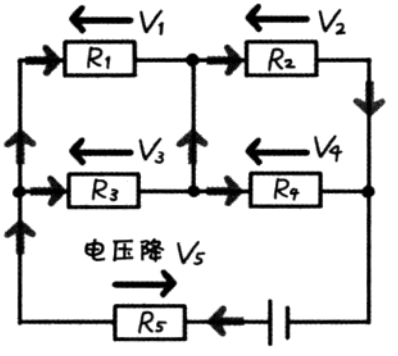
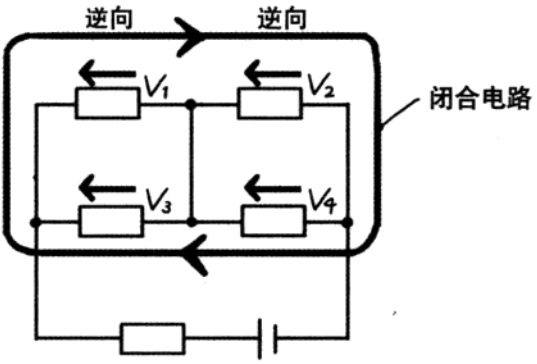


图 b　电压降的方向

是的。电流和电压降的关系我们在前面就学过了（请参考第 61 页）。

接下来，请注意这个电压降 V 的箭头和刚才那个大的闭合电路。
请追寻着闭合电路进行分析。你有什么发现吗？



啊，上面那两个电压降 V 跟闭合电路箭头的方向**相反**！

说的没错。此时，就可以放心地添加**负号**了。
也就是说，在这种情况下，等式

$$-V_1-V_2+V_3+V_4=0$$

成立。

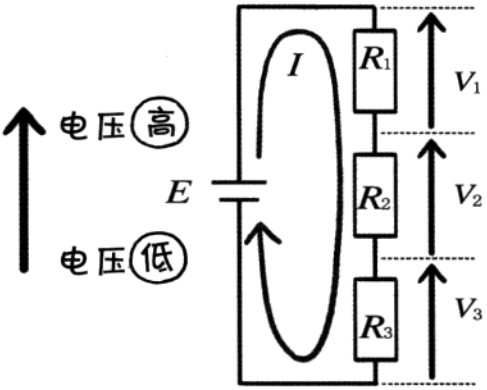
顺便说一句，若闭合电路的方向与上图所示相反，则等式就会变成

$$+V_1+V_2-V_3-V_4=0$$

但此时等式依然成立。

嘘，真是不可思议啊！

一开始我们就讲过，在连接有电源电压的电路中，总和为零的定律成立。接下来我们分析用箭头符号表示电源电压 E 的情况。



电源电压、电压降、闭合电路的箭头符号表示方法

追寻着闭合电路进行分析可知，

算式 $-V_1-V_2-V_3+E=0$ 成立，这个明白吧？

顺便说明一下，如果闭合电路的方向与上图所示相反，那么

算式 $+V_1+V_2+V_3-E=0$ 成立。

啊！是那个，这不就是刚开始学过的第二定律的公式

$$V_1+V_2+V_3=E$$

把等号右边的 E 移项到左边的结果嘛！

说的没错。我们刚才所讲的内容，其实全部都是理所当然的事情。但是，如果不能一次理解这些内容，在解答实际问题的时候，就会困惑不堪。

嗯，嗯。我明白了！

基尔霍夫定律换句话说就是**总和为零的定律**！

第二定律同样适用于没有电源电压的闭合电路。

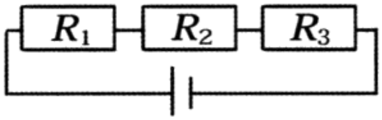
等效电阻

为了解答电气数学的问题，还有一个必须要记住的概念，那就是**“等效电阻”**。
所谓等效电阻，就是**把多个电阻组合成一个电阻**。
这样做能够简化计算，非常方便快捷。

叮咚，这个主意不错啊！

是的。这个便利的等效电阻的计算方法因电阻的连接方法是串联还是并联而不同。
（关于串联和并联的知识请参考第 23 页）
串联时等效电阻的计算方法如下。

串联



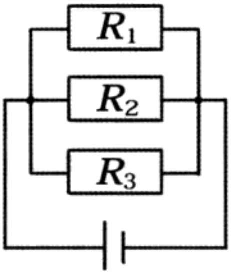
等效电阻

$$= R_1 + R_2 + R_3 \cdots$$

呵呵，这个很简单啊。

“并联”的等效电阻稍微复杂一些。

并联



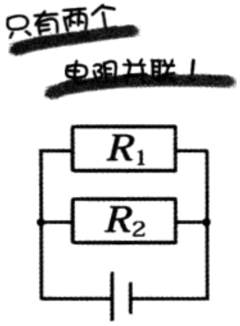
等效电阻

$$= \frac{1}{\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \cdots\right)}$$

$$= \frac{1}{\text{每个电阻倒数的和}}$$

嗯，的确很麻烦。

但是，如果**并联电路中只有两个电阻**的话，使用这个公式就非常简便。请记住等于“**积除以和**”。

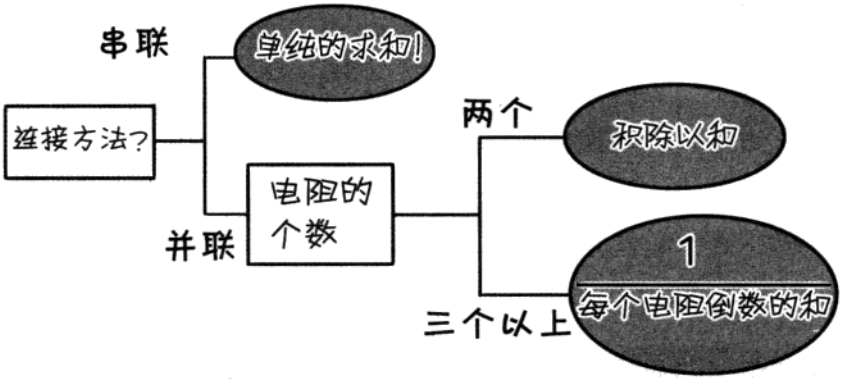


等效电阻

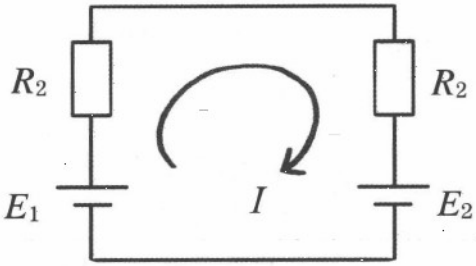
$$= \frac{1}{\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)}$$

$$= \frac{R_1 \times R_2}{R_1 + R_2} \quad \begin{matrix} \leftarrow \text{积} \\ \hline \leftarrow \text{和} \end{matrix}$$

嗯嗯。也就是说，要认真辨别电路，根据实际情况选择不同的计算方法。



问题 分别把直流电源和电阻进行合成！



在上图所示的电路中，请求出其中电流 I 的值。

另外，已知 E_1=4.5V，E_2=1.5V，R_1=2Ω，R_2=1Ω。

解析

好，我们开始啦！

在求解问题之际，首先要确认的是电源电压（**直流电还是交流电**）。

然后要确定电阻的连接方法（**串联还是并联**）。

在这个问题中，虽然电流的方向是确定的，但有时还需要自己假定**电流的方向**，或者为了方便计算而把电流的方向沿着闭合电路进行标记。

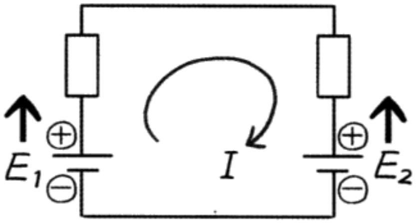
嗯？

电流的方向，自己能进行假定吗？

在直流电电路中，电流一般都是从电源的正极流向负极，但在交流电电路中，电流的方向是时左时右、不断变化的（请参考第 33 页）。但无论向哪个方向流动，首先需要确定一个方向才行。

好了好了，首先我们来分析有两个直流电源的情况。

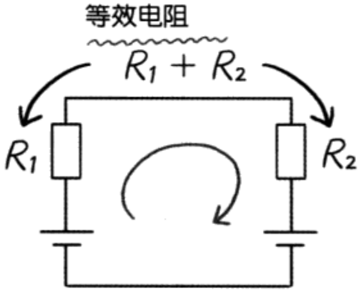
对此你有什么特别的想法吗？



啊！直流电源 E_1 和直流电源 E_2 的方向相反，这样一来，这两个电源会不会直接相互抵消了啊……

说的没错！**已经确定的电流方向中添加了方向相反的 E_2**，所以 E_2 的符号应该是负的。
也就是说，$E_1 - E_2$ 就是两个直流电源的组合。

原来如此！这么说来，电阻也是能够组合的了。
因为两个电阻是串联在一起的，所以等效电阻 $= R_1 + R_2$！



如上所述，我们把直流电源和电阻分别进行了等效。
在此，我们套用**基尔霍夫第二定律**可得，
电源电压（$E_1 - E_2$）= 电阻（$R_1 + R_2$）× 电流 I。

接下来我们整理这个**方程式**，最后代入数字就能够求解。
为了掌握解答电气数学问题的“分析方法”，
我们到最后再带入数字。

A. 解答

关于这个电路，基尔霍夫第二定律也成立，所以

$$E_1 - E_2 - R_1I - R_2I = 0$$

因为我们要求的（未知数）是电流 I，所以首先合并同类项可得

$$E_1 - E_2 - (R_1 + R_2)I = 0$$

$$-(R_1 + R_2)I = -E_1 + E_2$$

然后，等式两边同时除以$-(R_1 + R_2)$后得

$$I = \frac{E_1 - E_2}{R_1 + R_2}$$

因此，将每个数值分别代入上述算式可得

$$\underbrace{I = \frac{E_1 - E_2}{R_1 + R_2}}_{\text{欧姆定律}} = \frac{4.5 - 1.5}{2 + 1} = 1(\text{A})$$

也就是说，把这个电路中的直流电源和电阻分别合成为一个，这样就能简化运算了。

说的没错！

为了求出电流 I的数值，整理方程式后会发现，我们自然而然地得到了欧姆定律的公式。

! 数学解答

请好好回忆一下方程式的求解方法。

求解方程式 $5x+7=7x+3$。

【解法】

首先，把包含 x 的项（这被称为未知数项）移项到方程式的左侧，把不包含 x 的项（这被称为常数项）移项到方程式的右侧。

$5x-7x=3-7$

然后，简化这个方程式得

$-2x=-4$

等式两边同时除以 -2 得

$x=2$

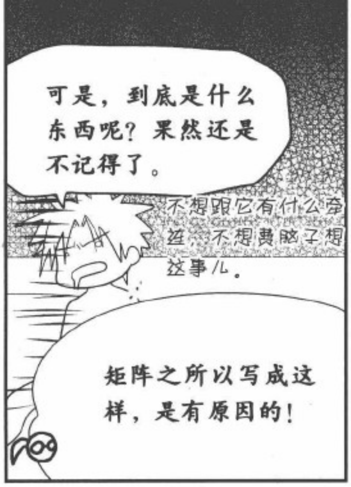
这就是方程式的解。

例题中，x 的系数（与 x 相乘的数字）刚开始是整数，但**如果 x 的系数中有分数或者小数等数字**，那么就在等式的两边同时乘以一个恰当的数字，**把系数转化成整数。**
这样就能够准确无误并且简便快捷地求解方程式。

2 利用联立方程进行解答的直流电路问题

联立方程和矩阵

※ 日语中写作“行列”，也有队列的意思。——译者注


可是，到底是什么东西呢？果然还是不记得了。
不想跟它有什么牵连，不想费脑子想这事儿。
矩阵之所以写成这样，是有原因的！


♪
原因主要就有这么几点。
1. 看上去一目了然，而且书写简单便捷。
2. 便于利用计算机进行计算。
3. 计算简单快捷，便于求解联立方程。
都是些非常具有实用意义的原因呢。


啊……麻烦……
联立方程很麻烦……
可记住新知识更麻烦……
受不了了！
青沼君，差不多就行了！


的确，如果求解只有两个未知数的“二元联立方程”，用我们在初中时代学过的解题方法就足够了，但如果求解有三个未知数的“三元联立方程”，不使用矩阵是很难求出来的。
如果现在不努力学习，只会让自己越来越难以迈进数学世界的大门！
滴流
滴流
滴流


以此为契机，牢牢记住用矩阵求解方程式的方法吧！
跟小电君一起排好队，两个人携手并肩战斗吧！
……看来是不得不学了啊……

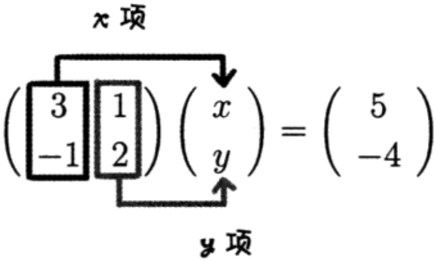
矩阵和行列式

首先来说说矩阵的写法。
就像刚才说过的那样，矩阵的写法如下图所示。

$$\begin{cases} 3x + y = 5 \\ -x + 2y = -4 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}$$

嗯嗯。数字和未知数之间的对应关系，参照下图就能明白了。



$$\left(\boxed{\begin{matrix} 3 \\ -1 \end{matrix}}\ \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}}\right) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}$$

在求解联立方程的时候，起着非常重要作用的是“**行列式**”。
矩阵只不过是数字的排列。
行列式则是能够便利地使用矩阵的算式。

啊。只要会使用行列式，就能顺利地求解联立方程，对吧？

是的是的。说的没错。
使用行列式来求解联立方程的方法被称作**矩阵法**。
使用这一方法能够快速地进行计算。

哦。这样的话，我可要努力掌握这个行列式和**矩阵法**呀。

什么是行列式

关于这个问题，我通过以下两个算式为例子来进行说明。
在这两个算式中，x 和 y 是**未知数**。
其他的都是**已知数**，就是已经知道数值的数字的意思。

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = d_1 \\ a_2x + b_2y = d_2 \end{cases}$$

x, y → 未知数
$a_1, a_2, b_1, b_2, d_1, d_2$ → 已知数

嗯嗯。以 $3x+1y=5$ 为例，x 和 y 是未知数。
其他的 3、1 和 5 都是已知数。

把这两个算式用矩阵表示则如下图所示。

注意！

$$\boxed{\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$$

需要注意的是最左边的部分。
行列式就是以此为基础建立起来的！那个就是这个！叮咚～

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

行列式的形状

等、等、等、等一下！我怎么越来越糊涂了！
那个小三角形是什么意思？为什么（括号）变成了直线？
x 和 y、d_1 和 d_2 都去哪里了？

哈哈！小三角形读作 Δ（德尔塔），是行列式的表示符号。

微分和积分中也会用到德尔塔，但这里的德尔塔跟那个没有任何关系。

（※ 行列式的英语说法是 determinant，所以也会用“det”或者“D”来表示行列式。）

括号之所以被直线替代，也不过是行列式的表示符号罢了，只要记住就行了。另外，x 和 y 之所以会消失，只要回忆一下矩阵的规则就能明白了。

$$\begin{array}{ccc} & x\text{项} & y\text{项} \\ \Delta = & \left|\begin{matrix} a_1 \\ a_2 \end{matrix}\right. & \left.\begin{matrix} b_1 \\ b_2 \end{matrix}\right| \end{array}$$

看！只要看看数字的排列就能知道哪些是 x 项，哪些是 y 项啦。根本不需要特意写出来，大家就都能心知肚明。

原来如此！可是，d_1 和 d_2 消失的原因还没有解决呢！这可是大事件！

没关系啦。

这是因为，关于 d_1 和 d_2，我们之后会用到。

好单纯的理由啊！

总之，行列式用符号 Δ 来表示。

在求解**二元联立方程**的过程中，会通过行列式 Δ、行列式 Δx 和行列式 Δy 这三个行列式来推导出答案。

（※ Δx 的意思是 Δ 的 x 项。同理，Δy 的意思是 Δ 的 y 项。）

Δx 和 Δy，也就是未知数的意思啊！

在求解“**三元联立方程**”时，除了 Δx 和 Δy 之外，还会用到行列式 Δz。另外说明一下，**Δ=0 这个联立方程无解**。

求解“**二元联立方程**”和“**三元联立方程**”时，计算过程差异很大。接下来我们将逐个解说其计算方法。

用矩阵求解二元联立方程的解题方法

那么，接下来我们用与之前同样的方法来解答“**二元联立方程**”。
为了方便理解，这次我们采用表格的形式进行说明。

d_1 和 d_2 中没有未知数 x 和 y。
这样的项被称作“**常数项**”。

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = d_1 & \cdots \ (1) \\ a_2x + b_2y = d_2 & \cdots \ (2) \end{cases}$$

用表格则如下所示。

	x 项	**y 项**	**常数项**
(1) 式	a_1	b_1	d_1
(2) 式	a_2	b_2	d_2

呃，行列式关注的是 x 项和 y 项，具体形式如下。

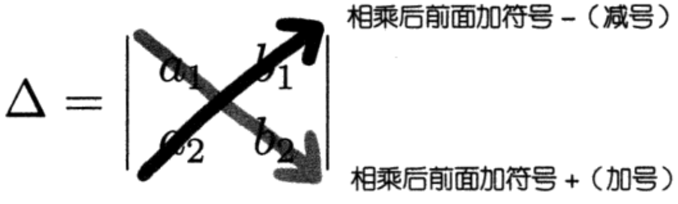
$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

接下来就要开始进行计算了。关键词是“**背带相乘**”。
记忆方法是：**右下方向的数字相乘 – 右上方向的数字相乘**。

哎？所谓背带，是东京箱根间往返大学生马路接力赛（于每年1月2日到3月2日举办的选拔大学生马路接力赛关东区优胜者的地方性大赛——译者注）还是?

不是不是。在这里希望你想象的东西，是像乘号那样相互交叉的样子。
背带指的是为了把和服的长袖子斜系在肩上而在背后交叉的带子（日本人穿和服劳动时，为了方便行动而使用的固定和服长袖子的带子——译者注）。

实际上，行列式的计算是这样进行背带相乘的。
首先，我们来求取行列式 Δ。



$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

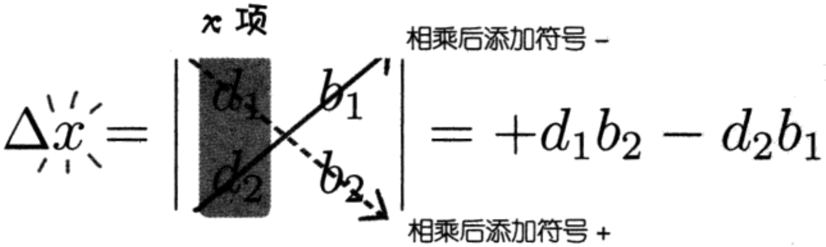
$$= \underline{a_1 b_2} - \underline{a_2 b_1}$$

啊，的确是
右下方向的数字相乘 – 右上方向的数字相乘呢。

是的。接下来我们继续求取行列式 Δx 和行列式 Δy。
在求取 Δx 的时候，要在“**x 项**”**中插入**“**常数项**”，
在求取 Δy 的时候，要在“**y 项**”**中插入**“**常数项**”。

常数项就是 d_1 和 d_2 呢！
你在之前就说过，在后面会好好使用它们。

请一定要认真观察 d_1 和 d_2 活跃的瞬间。
在求取 Δx 的时候，要在“**x 项**”**中插入**“**常数项**”。



$$\Delta x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 \\ d_2 & b_2 \end{vmatrix} = +d_1 b_2 - d_2 b_1$$

噢，把 x 项换成了常数项啊！

是的。同理，在求取 Δy 的时候，要在“y 项”中插入“常数项”。

y 项

相乘后添加符号 −

$$\Delta y = \begin{vmatrix} a_1 & \boxed{d_1} \\ a_2 & \boxed{d_2} \end{vmatrix} = +a_1d_2 - a_2d_1$$

相乘后添加符号 +

好了，这样我们就把 Δ、Δx、Δy 全都求出来了。
但为了求出未知数 x 和 y, **接下来我们该怎么办呢**？

嗨，都进行到这里了，接下来不用你说我也知道该怎么做了。
分别把 Δx 和 Δy 除以 Δ，就能求出 x 和 y 了。

$$\underline{x = \frac{\Delta x}{\Delta}} = \frac{d_1b_2 - d_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

Δx 除以 Δ!

$$\underline{y = \frac{\Delta y}{\Delta}} = \frac{a_1d_2 - a_2d_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

Δy 除以 Δ!

完全正确！这样就能计算出 x 和 y 的数值了。
这就是用矩阵法来求解二元联立方程的具体步骤。

哦，原来如此。可是，按照这个步骤进行计算真的能加快速度吗？

这次之所以花费时间比较长，是因为我们在解题过程中讲解得非常详细，而且进行得也很缓慢。可一旦熟练了之后，解答起来就会非常迅速。
我已经给你准备好了练习题，快点练习练习吧。

唉！

数学解答 用矩阵法求解二元联立方程。

$$\begin{cases} 3x + y = 5 \\ -x + 2y = -4 \end{cases}$$

【解法】

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}_{\Delta\text{ 德尔塔}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}}_{\text{常数项}}$$

如上图所示，联立方程可以用矩阵来表示，

$$x = \frac{\Delta x \overset{x\text{ 项}}{\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -4 & 2 \end{vmatrix}}}{\Delta \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{5 \times 2 - 1 \times (-4)}{\underline{3 \times 2 - 1 \times (-1)}} = \frac{10 + 4}{6 + 1} = \frac{14}{7} = 2$$

分别进行“右下方向的数字相乘 – 右上方向的数字相乘”这一计算过程

$$y = \frac{\Delta y \overset{y\text{ 项}}{\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -4 \end{vmatrix}}}{\Delta \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{3 \times (-4) - 5 \times (-1)}{\underline{3 \times 2 - 1 \times (-1)}} = \frac{-12 + 5}{6 + 1} = \frac{-7}{7} = -1$$

如上所述，便求出了联立方程的解 x=2，y=−1。

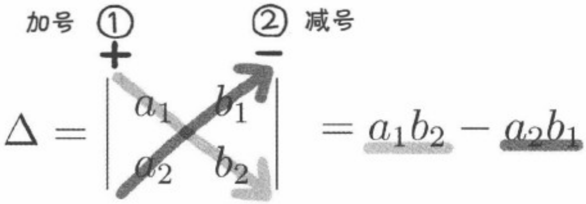
哇！习惯了之后确实很便利啊！

用矩阵求解三元联立方程的解题方法

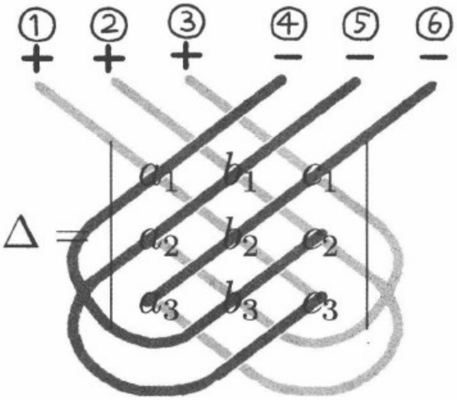
用矩阵求解有三个未知数的**三元联立方程**时，基本的分析方法跟求解二元联立方程时是一样的。但是，怎么说呢，或许看上去稍微显得复杂一些。

哦。真的这么复杂吗？

不是的，只要记住了解题方法就很简单了。
刚才说的**二元联立方程**的行列式是这样进行计算的。



三元联立方程的行列式因为有三个未知数，所以计算方法如下。



这同样也是**右下方向的数字相乘 – 右上方向的数字相乘**的背带相乘法的形象。虽然习惯了之后会很轻松，但刚开始的时候容易让人困惑不解。

……别说是让人困惑不解了，简直就是让人失去意识了。
这都是什么啊？那些拐着弯儿的背带相乘？

哎呀，先别这么说，还是来解答一下看看吧！
分析方法跟二元联立方程相同。首先把联立方程用行列式来表示。

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \cdots (1) \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \cdots (2) \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \cdots (3) \end{cases}$$

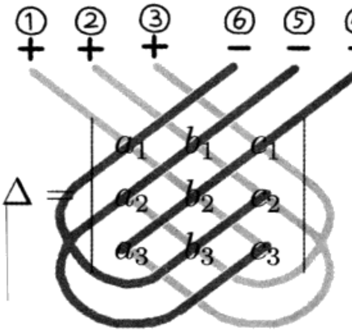
	x 项	y 项	Z 项	常数项
(1) 式	a_1	b_1	c_1	d_1
(2) 式	a_2	b_2	c_2	d_2
(3) 式	a_3	b_3	c_3	d_3

呃，关注 x 项、y 项和 z 项可得 Δ。

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

接下来，我们应用刚才说过的背带相乘法的要领来进行行列式的计算。
青沼君，请吧！

呜呜呜。呃呃呃……这样行吗？



$$= \underbrace{a_1b_2c_3}_{①} + \underbrace{b_1c_2a_3}_{②} + \underbrace{c_1b_3a_2}_{③}$$
$$- \underbrace{c_1b_2a_3}_{④} - \underbrace{b_1a_2c_3}_{⑤} - \underbrace{a_1b_3c_2}_{⑥}$$

OK! 青沼君已经弄明白了计算的方法了呢。接下来的步骤跟解答二元联立方程时一模一样。除了需要求出 Δ 之外，还要求出 Δx、Δy 和 Δz。

在求取 Δx 的时候，要在“**x 项**”**中插入**“**常数项**”。
在求取 Δy 的时候，要在“**y 项**”**中插入**“**常数项**”。
在求取 Δz 的时候，要在“**z 项**”**中插入**“**常数项**”。

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad \Delta x = \begin{array}{|ccc|} \multicolumn{1}{c}{x\ \text{项}} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{} \\ d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{array}$$

$$\Delta y = \begin{array}{|ccc|} \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{y\ \text{项}} & \multicolumn{1}{c}{} \\ a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{array} \qquad \Delta z = \begin{array}{|ccc|} \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{z\ \text{项}} \\ a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{array}$$

完全正确。将它们分别进行拐着弯儿的背带相乘后计算就可以了。

然后再把 Δx、Δy 和 Δz 分别**除以** Δ，就能求出 x、y 和 z 的数值了。
也就是说，未知数就能全部求出来了！

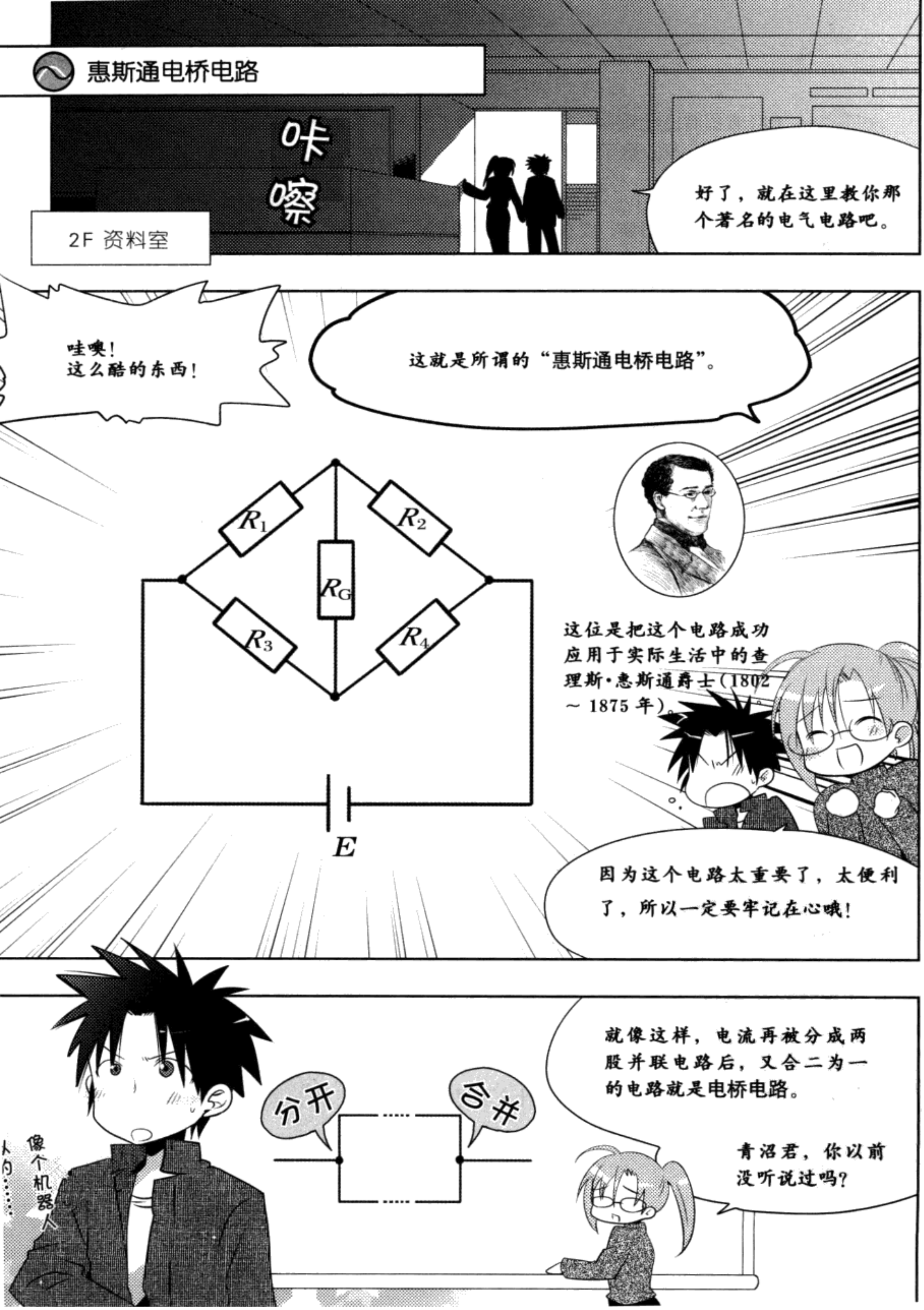
是的！就是这么回事儿。
过会儿我们就用矩阵法求解三元联立方程，来解决电气数学的实际问题。

啊，对了，我还忘了一件事儿，这个拐着弯儿的背带相乘有一个正式的名称，那就是“**萨拉斯方法**”。

原来人家有正式名称啊。为什么不早点说啊？

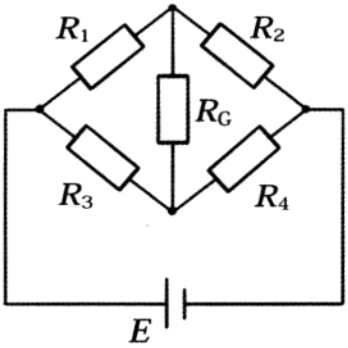
哎呀，因为我太投入了嘛。

惠斯通电桥电路


咔嚓
2F 资料室
好了，就在这里教你那个著名的电气电路吧。
这就是所谓的“惠斯通电桥电路”。
哇噢！这么酷的东西！
R_1
R_2
R_G
R_3
R_4
E
这位是把这个电路成功应用于实际生活中的查理斯·惠斯通爵士（1802～1875 年）。
因为这个电路太重要了，太便利了，所以一定要牢记在心哦！
就像这样，电流再被分成两股并联电路后，又合二为一的电路就是电桥电路。
青沼君，你以前没听说过吗？
合并
分开
像个机器人
人的……


那个正中间的 R_G 是什么东西？
G这个字母到目前为止还没出现过吧
啊
那个就是这个东西啦！检流计！
检流计的英语是 galvanometer，字母G就是这个英语单词的首字母。
哦！我在理科实验中见过这个东西！
检流计的表示符号也是字母G。
※今后，为了方便计算，用电阻 R_G 来表示检流计。
G
这个东西就是那个中心！
嗯嗯。检流计……
可是，这个电路有什么便利之处呢？
嘿嘿……关于这个电路的特征，可真是一言难尽呢。
读万卷书不如行万里路！
所以，从现在开始，我们就要解答电桥电路的问题啦。
让我们出发吧！
咣咣咣咣
唉
哇……把这个家伙当做对手，我真的没有打赢的底气呀！

问题　根据闭合电路组建联立方程



请求出这个惠斯通电桥电路的平衡条件。

知识点！

所谓**平衡条件**，指的是流经处于中心位置的检流计电阻 R_G 的电流为零时的条件。

问题解析

首先要全面了解敌人的情况，做到知己知彼。这个问题的目标，就是找出流经位于中心位置 R_G 的电流为 0（零）时的条件。

这还是第一次总结“**电气电路的解题方法**”呢。
首先确认电源电压（**交流电还是直流电**）和连接方法（**串联还是并联**）。然后……

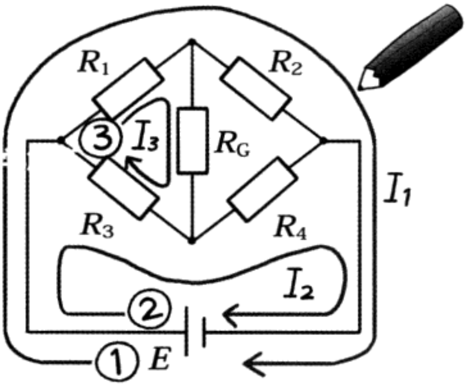
【第 1 步】设定电流的方向。
【第 2 步】寻找电路中闭合电路的个数。
【第 3 步】追寻每一个闭合电路，把基尔霍夫定律（电流定律和电压定律）应用到其中。
【第 4 步】运用了基尔霍夫定律后，就能够组建出若干个联立方程，然后求解这些联立方程就可以了。

上述这种解题步骤是最常用的解题方法。
所以，接下来我们首先找出这个电路中的闭合电路，然后把它们画出来。

嗯。在确认闭合电路的时候有什么技巧吗？

认真阅读问题，分析清楚到底要求出什么数值。
回到这个题目上来，通过分析可知包含 R_G 的闭合电路是绝对不可或缺的数据。
另外，因为是求取条件的问题，所以闭合电路中还必须有 R_1、R_2、R_3、R_4 和 E 等所有因素才行。

呃，这样的话，这样分析行不行？
电路①……直流电源 E ~ 电阻 R_1 ~ 电阻 R_2 ~ 直流电源 E
电路②……直流电源 E ~ 电阻 R_3 ~ 电阻 R_4 ~ 直流电源 E
电路③……电阻 R_1 ~ 电阻 R_G ~ 电阻 R_3 ~ 电阻 R_1



如左图所示，我自己试着画出了闭合电路！

非常好！在此，我们假设这三个闭合电路中流动的电流分别是 I_1、I_2 和 I_3。
接下来我们再次审阅一遍问题。

啊！“流经 R_G 的电流为零的条件”换句话说就是“I_3 为零的条件”啊！

是的！所以，接下来我们要做的，就是列出关于 I_3 的算式并进行计算。
把基尔霍夫定律应用到闭合电路中，组建联立方程。
如果把 I_1 、I_2 和 I_3 看做三个未知数的话，那么这个联立方程就是一个**三元联立方程**！
马上就该刚刚学过的**萨拉斯方法**登场了哦。

A. 解答

首先，把基尔霍夫第二定律应用到闭合电路 1 中可得

$$\begin{aligned}\text{电源电压 } E &= R_1(I_1+I_3)+R_2I_1\\ &= (R_1+R_2)I_1+R_1I_3\end{aligned}$$

然后，把基尔霍夫第二定律应用到闭合电路 2 中可得

$$\begin{aligned}\text{电源电压 } E &= R_3(I_2-I_3)+R_4I_2\\ &= (R_3+R_4)I_2-R_3I_3\end{aligned}$$

另外，把基尔霍夫第二定律应用于闭合电路 3 中可知总和为零！

$$\begin{aligned}0 &= R_1(I_1+I_3)+R_{\mathrm{G}}I_3+R_3(-I_2+I_3)\\ &= R_1I_1-R_3I_2+(R_1+R_{\mathrm{G}}+R_3)I_3\end{aligned}$$

把这三个算式进行汇总可得

$$\left\{\begin{array}{lllll} E & = & (R_1+R_2)\underline{I_1} & & +R_1\underline{I_3}\\ E & = & & (R_3+R_4)\underline{I_2} & -R_3\underline{I_3}\\ 0 & = & R_1\underline{I_1} & -R_3\underline{I_2} & +(R_1+R_G+R_3)\underline{I_3}\end{array}\right.$$

如上所示，我们组建了一个关于 I_1、I_2、I_3 的联立方程。

知识点！

接下来就要使用**萨拉斯方法**求解三元联立方程了。在还没有习惯的阶段，建议大家绘制如右图所示的表格。

I_1 的项	I_2 的项	I_3 的项	常数项
R_1+R_2	0（零）	R_1	E
0（零）	R_3+R_4	$-R_3$	E
R_1	$-R_3$	$R_1+R_G+R_3$	0

求取 I_3 的计算公式如下所示。

$$I_3 = \frac{\Delta I_3 \begin{vmatrix} R_1+R_2 & 0 & E \\ 0 & R_3+R_4 & E \\ R_1 & -R_3 & 0 \end{vmatrix}}{\Delta \begin{vmatrix} R_1+R_2 & 0 & R_1 \\ 0 & R_3+R_4 & R_3 \\ R_1 & -R_3 & R_1+R_G+R_3 \end{vmatrix}}$$

（关于三元联立方程的矩阵法解题方法，请参考第 85 页）

$$= \frac{-\left[R_1(R_3+R_4)-R_3(R_1+R_2)\right]E}{(R_1+R_2)(R_3+R_4)(R_1+R_G+R_3)-R_1^2(R_3+R_4)-R_3^2(R_1+R_2)}$$

$$= \frac{(R_2R_3-R_1R_4)E}{(R_1+R_2)\left[(R_3+R_4)(R_1+R_G+R_3)-R_3^2\right]-R_1^2(R_3+R_4)}$$

因为 $I_3=0$，所以只要这个算式的分子 $(R_2R_3-R_1R_4)E=0$ 成立即可。

如果电源电压为零，那么整个问题都不成立。

然而，因为 $E \neq 0$，所以 $R_1R_4-R_2R_3=0$。

所以 $R_1R_4=R_2R_3$

哇噢，解出来了！
虽然解出来了，但也把我累坏了啊。不，应该说虽然把我累坏了，但还是解出来了。

哈哈！辛苦了！
接下来，我们就以这个刚刚解出来的答案 $R_2R_3=R_1R_4$ 为基础，来分析惠斯通电桥电路的作用。

惠斯通电桥电路的平衡条件

作为问题的答案，出现了算式 $R_2R_3=R_1R_4$。
说实话，这个公式虽然很容易记忆，但你能从头到尾把它求出来，我真的很高兴。

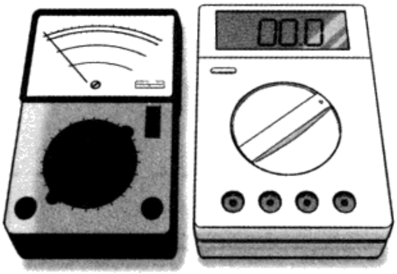
可是，这个电路到底有什么便利之处呢？

哈哈！还不明白吗？既然这个等式成立，不就说明在 R_1、R_2、R_3、R_4 这四个数字中，只要知道其中三个数字的值，就能求出另外一个数字的值。

如果四个电阻中有一个未知，那么只要把它们按照惠斯通电桥电路的配置进行连接，通过**调整位于中间位置的电流使其为零**，就能够准确地测量出这个未知电阻的数值。
很厉害吧！

……可是，我还有一大堆问题想问……
为了把电流的值调整为零，需要一点一点地进行调试，可是非常麻烦啊。
这真的能说非常便利吗？难道就没有其他测量电阻的方法了吗？

你说的没错。的确还有能够立刻测量出电阻大小的**测试器**。



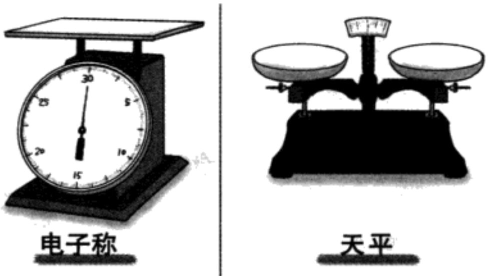
只要读取指针的显示数，或者显示器上的电子数值，就能马上知道电阻的大小。

但是，与测试器测量出的数值相比，在惠斯通电桥电路中测量出的数值更准确。

咦？真的吗？

测试器的测量方法被称为“**偏位法**”，通过惠斯通电桥电路进行测量的方法被称作“**零位法**”。
与偏位法相比，零位法的准确率一直都是非常高的。
我们可以把**偏位法**比作电子称，把**零位法**比作天平。

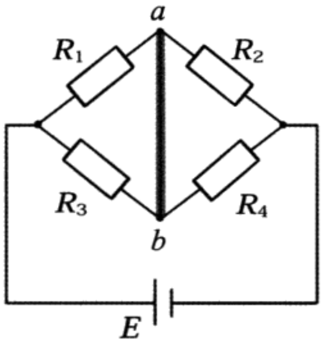
省时！省力！



虽然花费时间比较长，
但准确度比较高。

啊！这么说来，刚才的电桥电路就跟天平一样呢。
当刚好保持平衡的时候，中心位置是零。

说的没错。这些知识可以总结如下：



当 $R_1R_4 = R_2R_3$

成立时，
a 点和 *b* 点之间没有电压差
=*a*–*b* 之间没有电流流动
= 电流和电压的值为 0
= 平衡

平衡条件中的“**平衡**”这个词语本来的意思是“**两边相等，不会发生变化的状态**”。

噢，原来如此。这个电路**起着天平的作用，能够高度准确地测定电路**……
到目前为止，我终于弄明白了这个电路的便利性了。

是吧，这的确是个非常了不起的电路！
关于这个惠斯通电桥电路的平衡条件，经常会出现在问题中。
所以，请一定要记住这个电路的特点哟！

3 不等式的问题

不等式的性质

最后，让我们来聊聊不等式的话题。
青沼君，你总该见过不等式吧？

这个当然见过喽。

为了保险起见，我们今天再复习复习。
所谓不等式，是表示两个数字或者两个算式大小关系的量，大概说来如下所示。

- $a<b$　a 比 b 小
- $a>b$　a 比 b 大
- $a \leqslant b$　a 不比 b 大（有可能等于 b）
- $a \geqq b$　a 不比 b 小（有可能等于 b）

在此，符号<，>，≤，≥被称作“不等号”。

嗯嗯，这个我知道。

可是，不等式的计算方法有哪些呢？都还记得吗？
关于不等式有以下**三个性质**。

不等式的三个性质

1 如果不等式的两边同时加上或减去“同一个数字”，不等号的方向不变。

如果 $a<b$，那么 $a+c<b+c$，$a-c<b-c$。

2 如果不等式的两边同时乘以或者除以“**同一个正数**”，**不等号的方向不变。**

如果 $a<b$ 且 $c>0$，那么 $ac<bc$，$\frac{a}{c}<\frac{b}{c}$

3 如果不等式的两边同时乘以或者除以“**同一个负数**”，**不等号的方向与原来相反。**

如果 $a<b$ 且 $c<0$，那么 $ac>bc$，$\frac{a}{c}>\frac{b}{c}$


还真有不少内容我都忘了呢。这么一说我就想起来了。
简单，简单！要是这种程度的话，轻松取胜绝对没问题！


……你这么掉以轻心的话，可很容易出错哟！


噢！


但是，只要别太大意了，不等式的问题一般都不会出错。
不等式的问题一般用来**表示范围**，例如“100 以上 150 以下”等情况，在电气数学中也是经常出现的问题。

在电气数学的问题中，如果出现了“**表示……的范围**”这样的字眼，请一定要想到“**哦，这个问题需要用不等式来回答**”。


马、马上就来问题了啊！

问题　利用不等式来求范围

有一个额定电流是 10A 的保险丝。如果电源电压是 100V，那么请表示出负荷电阻适合的大小范围。

问题解析

首先讲一下专用术语的问题。所谓**额定**，指的是“规定的限度”。也就是说，额定电流是 10A 的保险丝表示……

“电流到达 10A 是最高界限”的意思。如果超过这个界限，保险丝就会被烧毁。

说的没错！顺便再说明一点，**负荷电阻**指的是产生电阻的装置。例如，小型电灯泡这样的负荷在完成发光这一工作任务的同时还会产生电阻，而负荷电阻则只单纯地产生电阻。

噢……
这么说来，它起不到什么作用?

不是不是！只产生电阻正是负荷电阻的作用啊。
特意产生电阻，从而控制电流的大小。
用于**调整电流**的大小和实验当中。

啊，这不就是欧姆定律的内容嘛。
如果电阻变大，电流就变小。
如果负荷电阻的大小超过一定的数值，保险丝就不会被烧毁，对吧。

A. 答案

在这种情况下，经过分析可知如果 10 A 的电流在电路中流动的话，保险丝就会烧毁，所以必须保证电流不超过 10A 。所以

$$I = \frac{E}{R}$$

$$\frac{E}{R} < 10\,\mathrm{A}$$

如上所述，只要求出满足上述不等式的电阻 R 的值的范围就可以了。将这个不等式两边同时乘以 R 可得

$$E < 10R$$

代入 E=100, 把未知数项 R 移项到不等式的左边可得

$$10R > 100$$

所以

$$R > 10\ \Omega$$

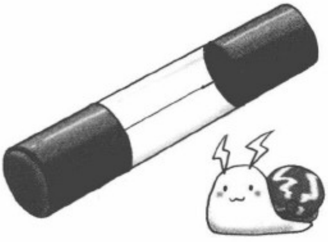
也就是说，所需要的电阻必须大于 10Ω 这个数值。

小电君的小知识“保险丝”

虽然很多人都知道，但在此还是再说明一下，保险丝是为了预防事故发生的部件。

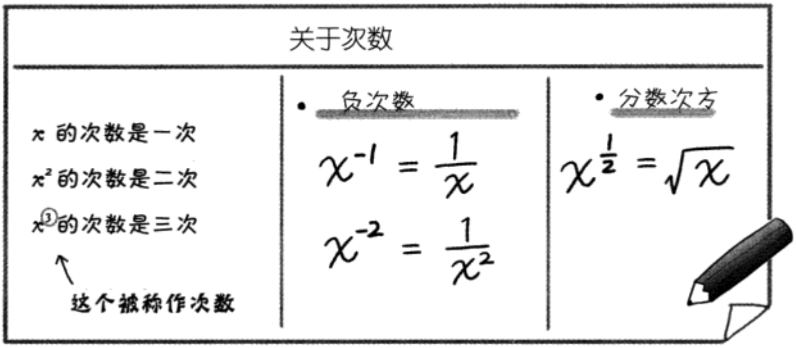
当电路中流动的实际电流超过额定电流时，保险丝就会自动毁坏，从而达到保护电气电路的目的，能够预防过热和火灾等事故的发生。

我们说“保险丝烧毁了”、“保险丝烧断了”的时候，指的是保险丝中的金属线因熔化而断开了的意思。



一次不等式

刚才我们求解的保险丝的问题就是**一次不等式**的问题，
关于“**次数**”这个问题，请参考下面的笔记。



关于次数

x 的次数是一次
x^2 的次数是二次
$x^{\textcircled{3}}$ 的次数是三次
这个被称作次数

• 负次数

$$x^{-1} = \frac{1}{x}$$

$$x^{-2} = \frac{1}{x^2}$$

• 分数次方

$$x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$$

嗯嗯。这么说来，刚才的未知数 R 的次数的确是一次。
……这样的话，是不是说像未知数 R^2 这样的次数是二次的复杂题目随时都可能出现啊？

哈哈。这将是今后我们要学习的内容。
那么，最后再确认一次**一次不等式中值得注意的问题**，然后就下课。

$$ax + b > cx + d$$

在解答这个不等式时，把 x 项全部移项到左边，把常数项全部移项到右边，可得

$$(a - c)x > d - b$$

不等式两边同时除以 $a - c$ 可得

$$x > \frac{d-b}{a-c} \quad （当 a - c > 0 时）……正数$$

$$x < \frac{d-b}{a-c} \quad （当 a - c < 0 时）……负数$$

不等号的方向由 a 和 c 的大小来决定。

要点！不等式的两边不能同时除以 0，也就是说，在这种情况下，$a-c \neq 0$。

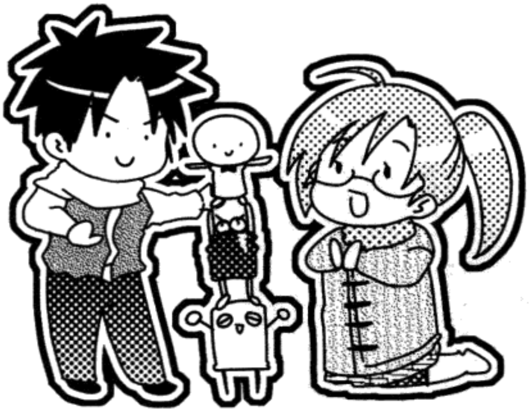
除数是正数还是负数才是关键点。
好了我记住了。


唉……年关了，连太阳降落得也早了呢。
这会儿天就已经全黑了。
今天也非常感谢您了啊。
连着好几天都麻烦您，让您连好不容易的休息日也没法好好休息……
别客气……我不是说过了嘛，真的没关系啦。
……能表示感谢了！
进步了！
咕咚！
话又说回来，过了圣诞节，街道上又会一下子变得很安静了呢。
是、是啊，灯饰也都没有了。
大街上的气氛会一下子冷落下来了呢……让人怀有一种年关的心情啊。
说实话，在圣诞节之前，装饰整条大街的灯饰还真让人很操心呢。
所以，看到今天这个样子，真的松了一口气。
啊！别误会哈，我真的很喜欢这些灯饰，看起来好漂亮！
我深爱的电气能够发出这样灿烂的光芒……真的被感动得一塌糊涂啊。
啊……


这么说来，在我们第一次见面的时候，我或许就是这么想的。
真想一个人去看灯饰呀。真的很不错呢。
这个人和我一样，也患有精神病。
你能明白吗?
那种感觉我是知道的啦。圣诞节结束后，我也就放心了。
什么啊！是“朋友”嘛。
那种只有走运的家伙才会有的感觉！你这么说真让人没面子！
是，是吗？真的很对不起啊！
……什么呀?
圣诞节的傻瓜！
傻瓜！
快点来吧，春天！春饼！
太好了，终于轻松了……

第 3 章

三角函数和矢量

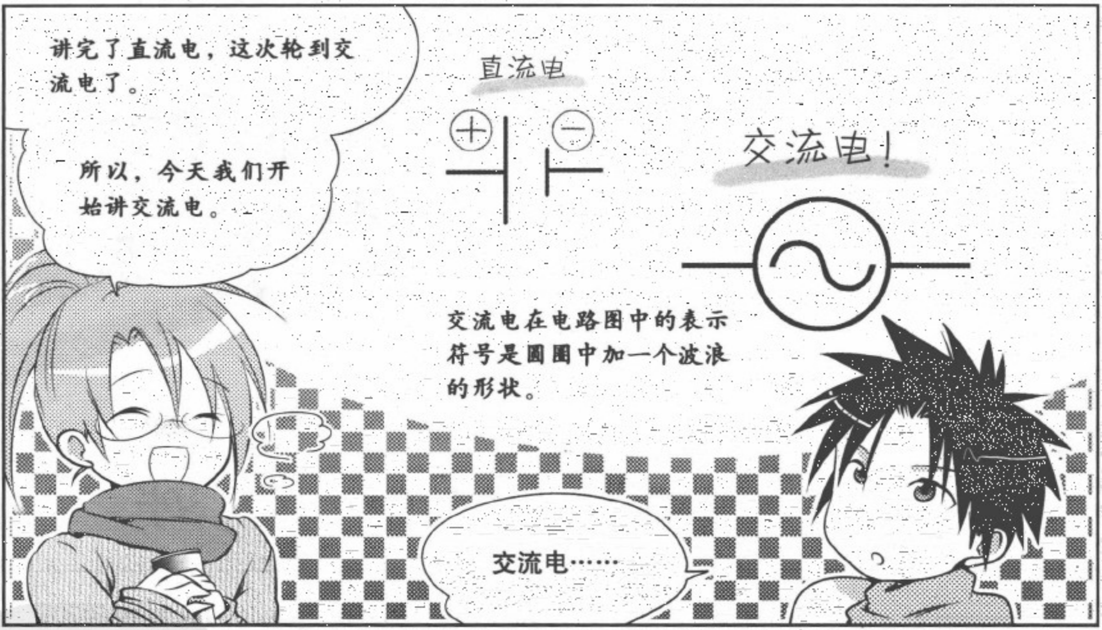


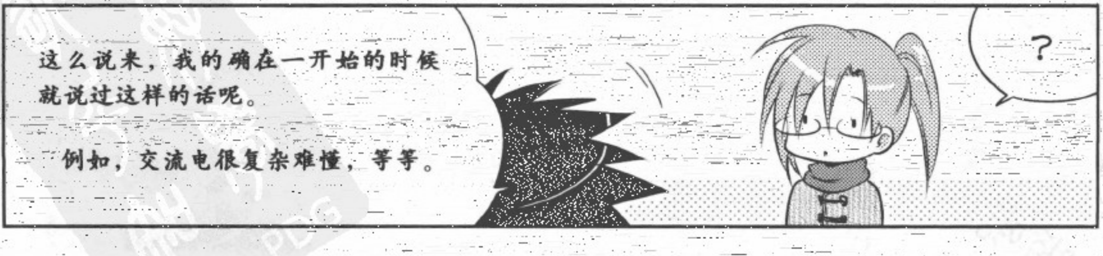

哒哒哒哒
电力博物馆
对不起，
我来晚了。
怎么了？
一脸黑线
今日闭馆
啊，今天闭馆啊。
到年末的缘故呢。
这没办法了
今天闭馆。明天见。
对不起啊。我把这事儿忘得一干二净了。
呜呜
没关系、没关系啦！
真的没关系的。
嗯。可是，应该换到什么地方好呢？
啊？


我是不是应该把住处提供出来当做学习场所呢? 可这属于常识范围内的事情吗?
扑通扑通
才认识这么几天就邀请人家去住处，是不是很没礼貌啊?
如果能找到家庭教室之类的地方就好了。
扑通
哎呀，在这个年关之际，如果出点什么乱子可就更麻烦了。
扑通扑通
对了！
公园可是个适合学习的好地方！
呼
呼
呼
……
好书法家不挑毛笔。就在这里吧，虽然有点冷，但一想到电气就觉得暖和了。
来吧，我们快开始吧。
啪啪
硬邦邦的
来吧
呼呼
哇啊啊啊！

1 关于交流电的基础知识

交流电很复杂难懂

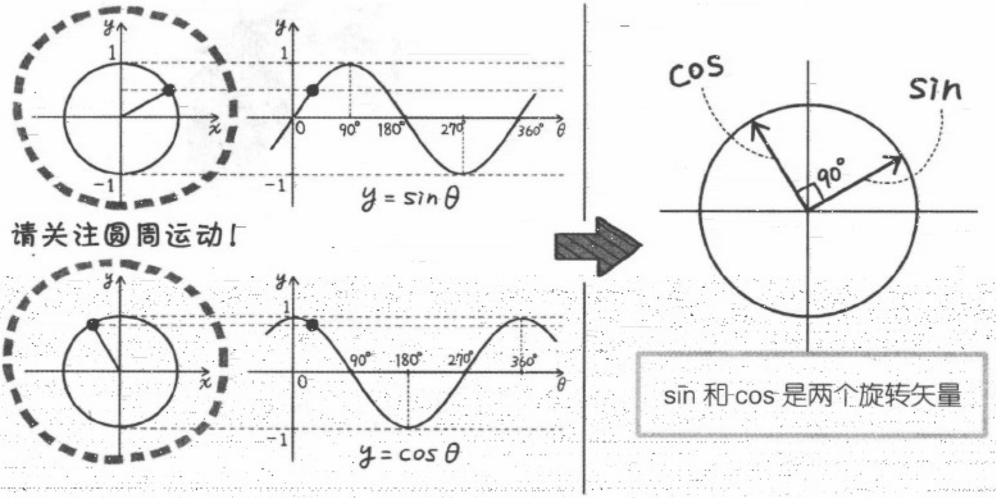





旋转矢量
正弦波交流电
复杂难懂
（请参考第 44 页）
你还说过，在交流电中两个波形会错开而产生相位。
你还说过，利用矢量确定角度很省时省力，等等。
啊！
你都还记得啊！说的没错，就是这样！
青沼君真厉害呀！
哪里哪里……
嘎
嘎
哒
哒
哒
哒
呆头呆脑
可是，就像青沼君刚才所说的那样，交流电的确非常复杂难懂。
但是，你既然已经记住了这么多知识，那就简单了。
首先，我们讲一讲表示相位的矢量。

表示相位的矢量

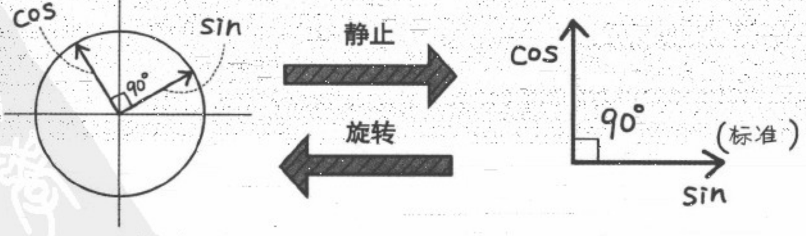
首先，请回忆一下我们一开始所讲过的 sin 和 cos 的图像（请参考第 31 页）。**看到波形**我们就知道，两个图像的形状是一模一样的，只是两者之间有 90° 的错位。



我们通过黑色吊舱分析的圆周运动能够原原本本地用**旋转矢量**表示出来。然后，我们把 sin 和 cos 这两个旋转矢量放置在同一个圆中进行比较，会发现……

啊，“这两个矢量间的角度”通常是 90°。矢量之间的这个 90° 本来就是波形图像之间错开的 90° 啊！

是的。顺便说明一下，如果**把其中一个矢量作为标准看作“静止矢量”**，那么矢量之间的角度会更加显而易见，更加简单易懂。



旋转矢量　　　　静止矢量

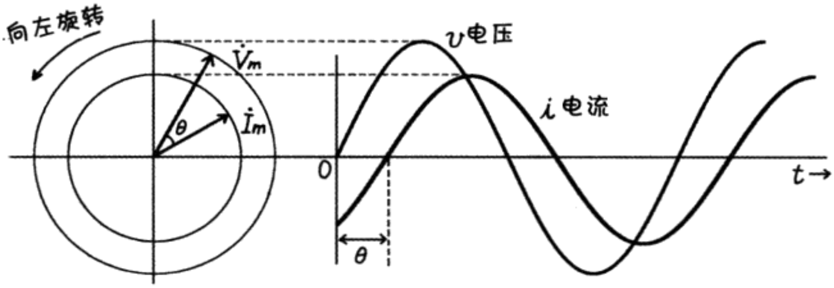
所谓**用矢量之间的角度来表示相位**，也就是波形之间的错位，就是这么一回事儿。这个矢量之间的角度被称作“**相位角**”。

相位角就是相位之间的差。要想了解相位，只要观察相位角就明白了呢。

在这里有一个问题需要特别注意，那就是矢量一定是**向左旋转（逆时针方向旋转）**。也就是说，在这种情况下，我们一看就能明白 **cos 比 sin 领先 90°** 。也可以说“**cos 的相位比 sin 只领先 90°** ”。

啊，这么说来，至今为止，我们只考虑了错位这个问题。
哪个领先了，哪个落后了，也是个非常重要的问题呢。

说的没错。
是领先了还是落后了，通过波形很难进行判断，果真还是矢量比较便利。
另外，因为矢量的长度和正弦波的最大值相互对应，所以长度较长的矢量说明正弦波的最大值较大。
例如，我们来观察下图中分别代表某个电压和电流的两个旋转矢量。



电压和电流之间的相位一般只有 θ。

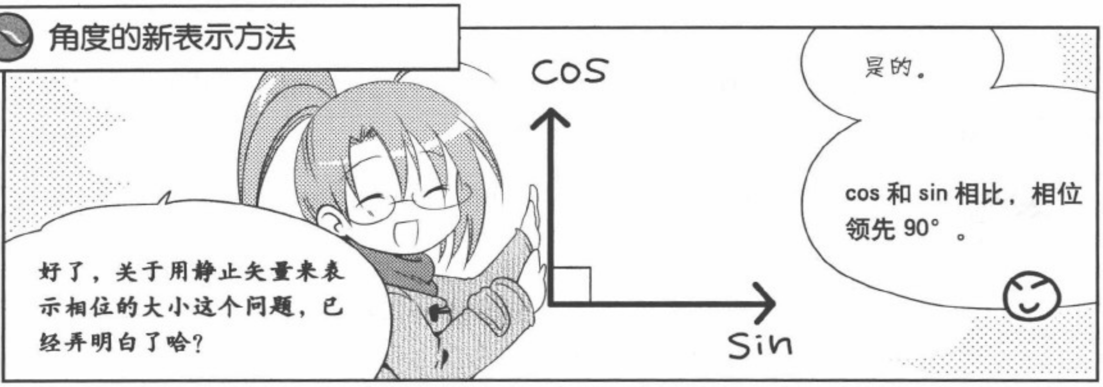
$$v = V_m \sin \omega t$$
$$i = I_m \sin(\omega t - \theta)$$

两者之间存在相位并且最大值不相同的两个旋转矢量的情况

这样啊。看到这样的两个旋转矢量，虽然容易让人联想到钟表的分针和时针，但两者的性质完全不同呢。
矢量一定是**逆时针方向旋转**。钟表的时针和分针两者之间的角度会随着时间的变化而发生变化，但两个旋转矢量之间的**角度通常是确定的**。

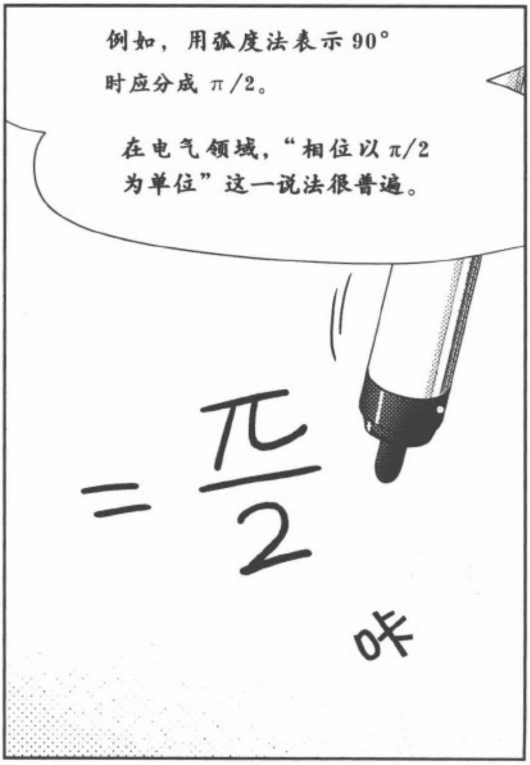
说的没错！矢量跟钟表的指针可是完全不同的两码事儿。这一点可一定要牢牢记住喽。

角度的新表示方法


好了，关于用静止矢量来表示相位的大小这个问题，已经弄明白了哈？
cos
sin
是的。
cos 和 sin 相比，相位领先 90°。


是的。但是，这个 90° 还能够用别的方式来表现出来。
就是被称作“弧度法”的角度表示方法。弧度法是学习交流电所必不可少的知识。
啾
啾
弧度法？


简单地说，就是用圆周的长度来表示 0° 到 360° 的角度的方法。
弧度法
〔rad〕弧度
单位是 rad（弧度）！


例如，用弧度法表示 90° 时应分成 π/2。
在电气领域，“相位以 π/2 为单位”这一说法很普遍。
= π/2
咔

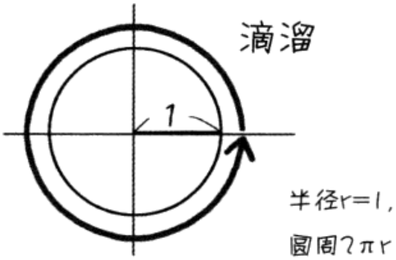

$\frac{\pi}{2}$
90°
角度 90°
=
$\frac{\pi}{2}$ [rad]
弧度法
总之，就是这么回事儿。
表示角度的弧度法……角度……
……??
π(派)就是圆周率，对吧？
为什么表示角度还用到π呢？
?
哈哈……关于这个问题，我们之后再详细讲解。
接下来轮到这个孩子登场了！
叮咚
哦，欧米伽！
热乎乎的
这个ω（欧米伽）的单位是rad（弧度）/s（秒），也跟弧度有着千丝万缕的联系。
接下来我们就一起来总结总结吧。

弧度法

在交流电领域，多数情况下都用**弧度法**来表示角度。
所以，一定要从现在开始就习惯并接受这个弧度法。
（※ 弧度法也被称作弪度法）

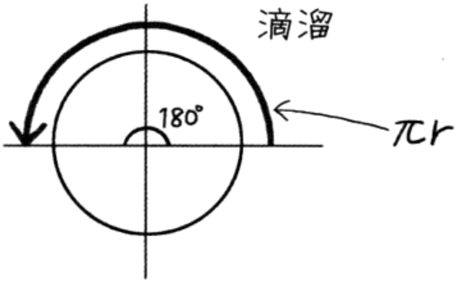
嗯。虽然我很想习惯它并接近它，但因为它来历不明，所以总觉得跟它有些隔阂。
为什么角度会变成包含 π 的数字呢？ π 不是圆周率嘛。

首先，请观察下图。
这是一个**半径 r=1 的单位圆**。在这个圆中，**圆周的计算公式是 2πr**，虽然你有可能已经不记得这个计算公式了，但我们在小学的时候就学过了。



嗯嗯，虽然计算公式已经忘记了。
但你所讲述的内容我能听懂。

好的，接下来我们分析 2πr 的一半，πr 的情况。借用图来分析的话……



180° 这种情况啊。啊，这个是半径 r=1 的单位圆。
因为 r=1，所以将其代入 πr 中可得……就是 π 啊！

是的！这就是弧度法的表示方法。
单位是 rad（弧度），具体总结如下。

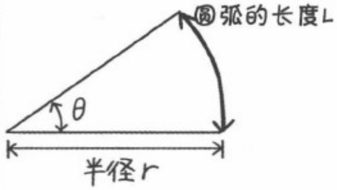
弧度/rad	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π
角度/（°）	30	45	60	90	180	360

角度和弧度的对应关系

哦，原来如此。原来是这样一一对应的啊。
只要知道了 180° =π，其他的随时都能通过计算求出来。
可是，我还有个问题，为什么特意引进弧度法呢？

理由非常简单，用一句话来表述就是因为“**用数学算式来表示的时候或者进行计算的时候，非常便利！**”

反过来说，如果不用弧度法，公式会变得非常复杂难懂。



在求取“圆弧长度”时，

- 如果角度θ用（°）表示，那么弧度的计算公式表示为 $L = 2\pi r \times \frac{\theta}{360}$
- 如果角度θ用（rad）表示，那么弧度的计算公式表示为 $L = 2\pi r \times \frac{\theta}{2\pi} = \boxed{r\theta}$

省心省力！

另外，在电气数学领域，非常重要的三角函数的微分和积分的计算公式也与弧度法有关。
一旦习惯了，你就会感觉到弧度法是非常简单方便的计算方法。

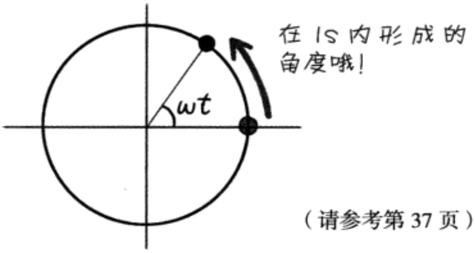
哦。公式能变得简单当然好啦，计算能变得非常便利当然也好啦。
也就是说，如果记不住弧度法，还真是一大损失呢。

说的没错。这是我们的祖先好不容易留给我们的宝贵知识财富，我们就来实际应用下看看吧。

ω 既是角速度又是角频率

关于 ω（欧米伽），一开始我们讲过的内容还记得吗？

记得。呃，长的像猫咪嘴巴的 ω 被称作“**角速度**”，表示**做圆周运动的点在 1s 内所形成的角度**。



（请参考第 37 页）

所以，**角速度 ω × 时间 t〔s(秒)〕就能求出角度的大小**。
也就是说，ωt= **角度** θ 。

完全正确。在此追加一个知识点，ω 的单位是 rad/s(弧度每秒)，请一定要记住哦。
也就是说，**所谓 ω，就是在 1s 内能够形成的弧度的数值。**

啊，弧度（rad）就是刚才学过的弧度法！
也就是说，“形成了多少弧度？”=（等于）“形成了多大的角度？”。

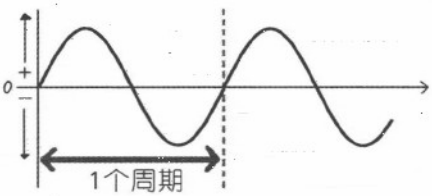
是的。在这里有一个非常重要的公式一定要记住，就是下面这个公式！

角度 θ = 角速度 × 时间 =ωt〔rad〕

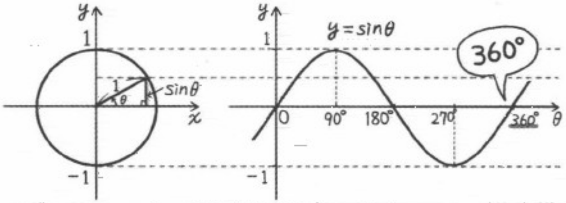
嗯嗯。因为 ω 的单位是 rad/s，所以 ωt 的单位是 rad 喽。

最后，我再教给你一个重要的知识点。
实际上，ω 不仅是“**角速度**”，同时还被称作“**角频率**”。
频率这个词儿，你还记得吧？

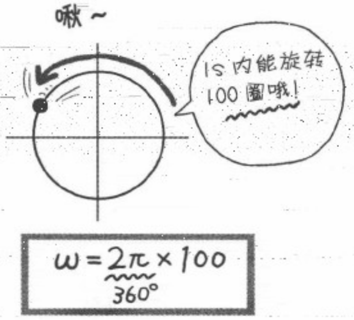
在 1s 内，1 个周期循环反复的次数就是“频率”，表示符号是f，单位是 Hz（赫兹）。我说的对吧？

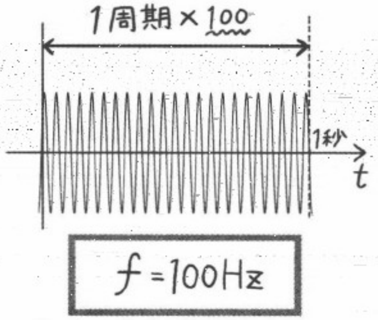


说的没错。另外，**1 个周期就是圆的 1 周。**



嗯嗯。也就是说，**角频率（角速度）**ω 的数值越大，旋转一周的速度就越快，**频率**f的数值就越大。





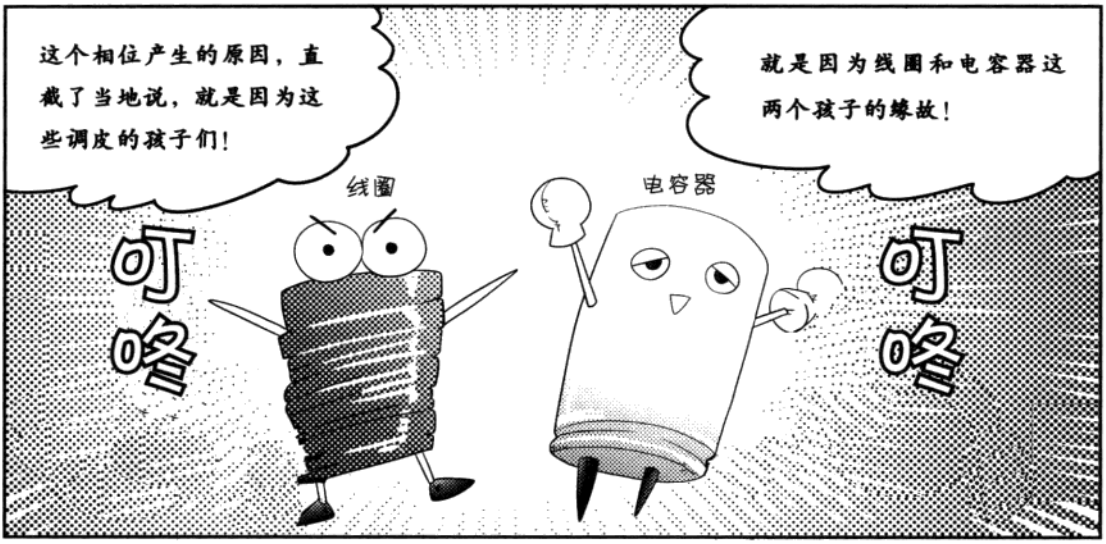
完全正确！这就是表示**角频率（角速度）**ω〔rad〕和频率f关系的公式。其中 2π **就是用弧度法表示圆一周 360° 的表示方法。**

角频率（角速度）$\omega = 2\pi f$〔rad〕

哎，ω 和f的关系能够用这么简单的公式来表示啊。
关于**角速度**和**角频率**这两个词儿的意思，我算是弄明白了。

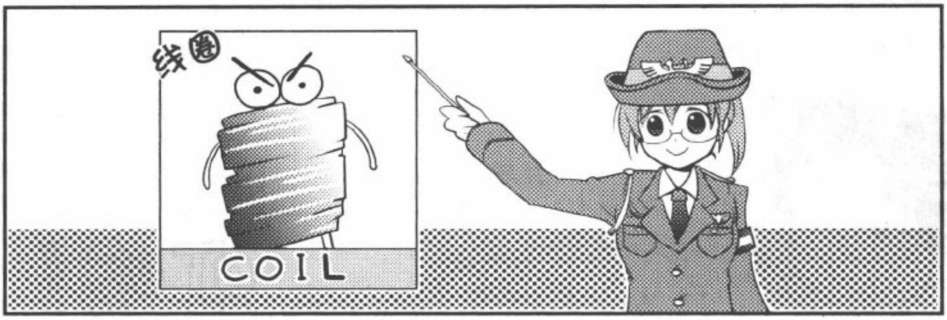
2 交流电领域中矢量的使用方法

相位产生的原因是什么



元件	符号	单位	备注
电阻	R	欧姆 〔Ω〕	就是‘Resistance’中的R
线圈	L	亨利 〔H〕	就是‘Coil’中的L
电容器	C	法 〔F〕	就是‘Condenser’中的C

线圈的特征



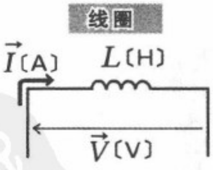
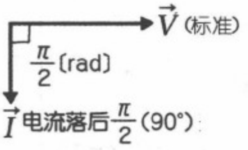
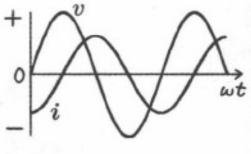
首先我来汇报一下对线圈进行身份调查的结果。因为踏踏实实地进行了搜查，所以弄清楚了很多事情呢。

身份调查？

所谓线圈，发动机当中也有应用，其作用是与电流的变化相对应而产生**电动势（电源电压）**。实际上，线圈生性爱热闹，**“非常喜欢状况发生变化”**！一旦有电流流过，线圈就会产生**反电动势**。
总之，线圈会产生与原来的电流**方向相反**的新电流！

哎！线圈还真是个了不起的干劲十足的家伙呢！

是的。线圈的这个性质正是**相位**产生的原因。请看下图。

电路	矢量（以电压为标准）	波形
		

如果电路中有线圈，那么“电流”就会落后。
简而言之，因为线圈产生**方向相反**的电流，所以原来的电流就不能正常流动，从而就会落后。
上述这种状态，被称作**电流 i 与电压 v 相比的“落后相位”。**

另外，表示线圈性质的词汇是“**inductance※**”**感应线圈**。
（※ 线圈这个词在英语中也被称作 inductor。关于后缀为“ance”的词我们将在第 122 页进行介绍。）

如果感应线圈的体积大，那么线圈的性质※发挥得就比较强大，相反，如果感应线圈的体积小，那么线圈的性质发挥得就比较弱小。
（※ 线圈还会产生被称作磁束的物质等，这些都是线圈的性质）
感应线圈的符号是 L，单位是 H（亨利）。

啊！刚才你说过线圈的符号是 L，单位是 H（亨利），但准确地说这应该是表示感应线圈大小的量呢。

是的。最后，还有一个非常重要的术语需要牢记在心。
那就是表示电流流动难易程度的“**reactance※**”**电抗**。
（※ 请跟反作用 reaction 这个词汇进行关联记忆。详细内容请参考第 122 页。）

电抗是一种类似于**交流电中“电阻”**的物质。
符号是 X，单位跟电阻相同，都是 Ω（欧姆）。

在直流电中，线圈和电容器都那么老实本分……
但在交流电中，却会一下子产生电阻——**电抗** X。
虽然还是那副老实巴交的脸蛋，却一下子变成了恐怖分子呢！线圈和电容器！

嗯，嗯。的确如你所言，如果电阻增大了的话，计算过程会变得非常复杂呢。

呵呵，对了，我这里还有一个好消息哟。实际上，**这个电抗 X〔Ω〕也跟电阻 R〔Ω〕一样，完全适用于欧姆定律。**

欧姆定律

$$\boxed{\text{电流}\,I=\frac{\text{电压}\,V}{\text{电阻}\,R}} \Rightarrow \boxed{\text{电流}\,I=\frac{\text{电压}\,V}{\text{电抗}\,X}}$$

哦哦！所以，根据欧姆定律，如果知道这三个量中的任意两个，就能够计算得出另外一个量的数值。

是的。也是因为这个缘故，所以我接下来所讲述的关于电抗的计算公式可一定要记住哦！
记住了这些公式，也就算是找到了解答问题……不对，应该是解决事件的捷径了。

首先，线圈的电抗被称作“**有感电抗**”。
用公式表达如下：

$$\text{有感电抗}\ X_L = \omega L\ \text{〔}\Omega\text{〕}$$
$$= \underbrace{2\pi f}_{\text{角频率}}\underbrace{L}_{\text{线圈 (inductance)}}\ \text{〔}\Omega\text{〕}$$

电抗的符号是 X，添加上线圈或者感应线圈的符号 L，便得到了有感电抗的符号 X_L。

噢……

青沼君，现在可还不是完全放松的时候哦。
在这个公式中，隐藏着一个非常重要的知识点。那就是，**线圈的电抗**，也就是**有感电抗跟频率成正比。**

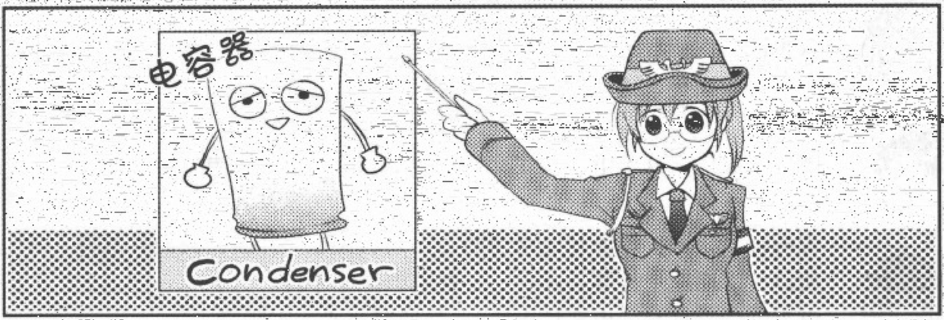
啊，的确是成正比关系呢。
也就是说，频率越大，电抗这个电阻就越大。
嗯？这么一说，怎么总感觉是理所当然的事情呢。

哈哈，只要把这个跟电容器进行比较就显而易见了。
我就直接说结论吧，**电容器的电抗跟频率成反比。**

噢，是这么回事儿啊。
成正比和成反比，两者的性质完全相反呢。

说的没错。线圈和电容器，请把这两者的差异牢牢记在心里吧。
接下来我们继续审查另外一个犯人电容器的情况！

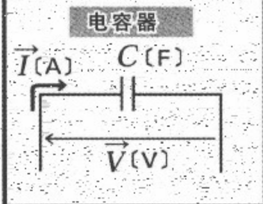
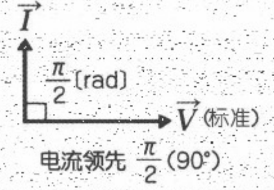
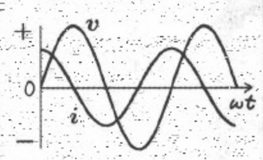
电容器的特征



接下来是关于电容器的审查报告！
简而言之，电容器就是能够储存电能、充电的设备。

那么，难道这个性质正是**相位**产生的原因吗？

是的。请看下图。

电路	矢量（以电压为标准）	波形
		

如果电路中有电容器，那么与有线圈的情况正好相反，这次是“电压”会落后。
随着电容器不断充电，电压则呈现逐渐上升的态势。
因为要花费些时间，所以电压会落后。
上述这种状态被称作**电流** i **相对于电压** v **的“领先相位”**。

那么，表示线圈性质的用语是“感应线圈”。
而表示**电容器性质**的用语则是“capacitance※”**电容量**（=静电容量、电流容量）。
（※ 电容器在英语中还被称作 capacitor。）
这是表示能够存储多少电气能量的量。

啊，容纳人数或者容纳数量等意思被称作容量哈。
演唱会现场的容量是 100 人，等等。哎呀，我还没去过演唱会现场呢。

我也没去现场看过演唱会啦，哈哈……
咱们言归正传，这个静电容量的符号是 C，单位是 F(法)。

嗯嗯。那么，这个电容器在交流电中也产生电阻——**电抗 X 吧**。

说的完全正确。线圈和电容器的心里到底在想些什么，我们真的摸不透呢。
所以，下面这个计算公式也一定要牢牢记住才行。
电容器的电抗是“**电容性电抗**”，其计算公式如下所示：

$$\text{电容性电抗 } X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{\underbrace{2\pi f}_{\text{角频率}}\,\underbrace{C}_{\text{电容器（静电容量）}}}\ 〔\Omega〕$$

在电抗的符号 X 后面添加线圈或者感应线圈的符号 C，就得到了电容性电抗的符号 X_C。
就像之前说过的一样，电容性电抗和频率两者之间成反比。

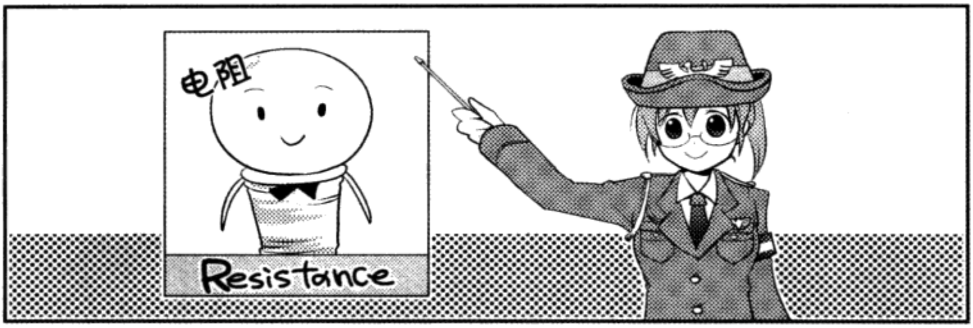
如上所述，犯人们的特征我们已经一清二楚了。那么，最后我们再来说说电阻的特点。

知识点！
关于带有后缀“ance”的用语，我们可以理解成“**用数字表示某种性质**”的词汇。

“inductance”是 inductor（线圈的英语表述法）+ance
“capacitance”是 capacitor（电容器的英语表述法）+ance
“reactance”是 reaction(反作用)+ance

当交流电在电路中流动时，线圈和电容器会起到“阻碍流动”的**反作用**。
用数值表示这个“阻碍流动的反作用的大小”的量就是电抗（reactance）。

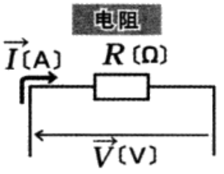
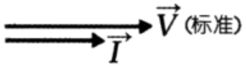
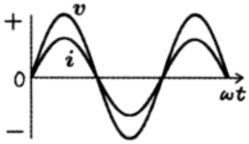
电阻的特征



关于电阻的性质，无论在交流电中还是在直流电中，都没有什么变化。
电阻的表示符号是 R〔Ω〕。跟相位没有任何关系。

表里一致，还真是个好孩子呢。

说的没错。请看下图。

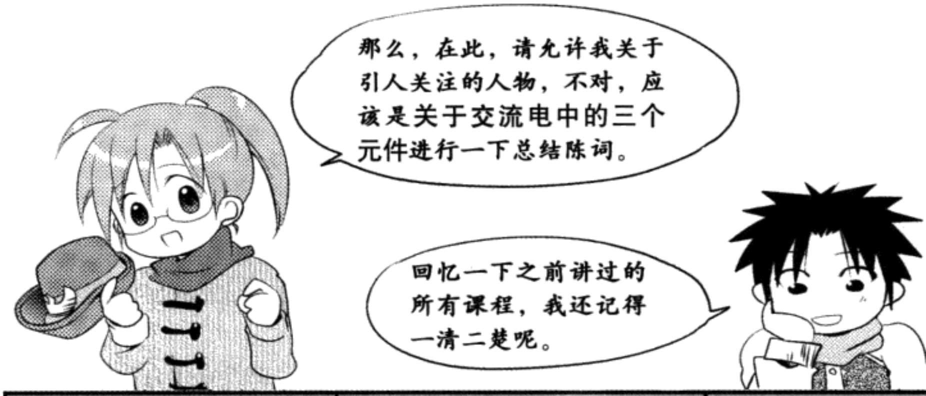
电路	矢量（以电压为标准）	波形
	 ※ 如果完全重叠的话不容易进行观察，所以把两个矢量错开写。	

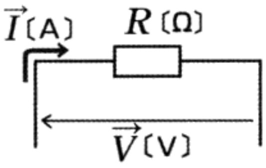
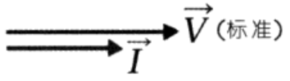
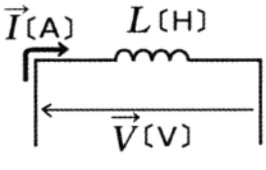
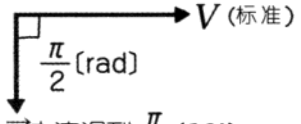
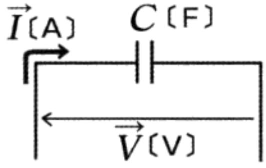
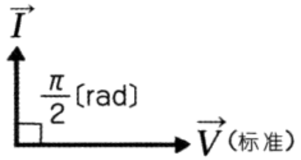
电阻的特征是没有**位相**，也就是说它是“**同相**”的。
只记住这些就可以了。

明白了。这样的话，三个元件的特征就全都弄清楚了。

与相位有关的人物线圈和电容器，还有跟相位无关的人物电阻。
这三个人今后也会经常出现在我们的眼前。
他们可是电气数学领域中非常引人关注的重要人物哦！

关于交流电中元件的总结报告



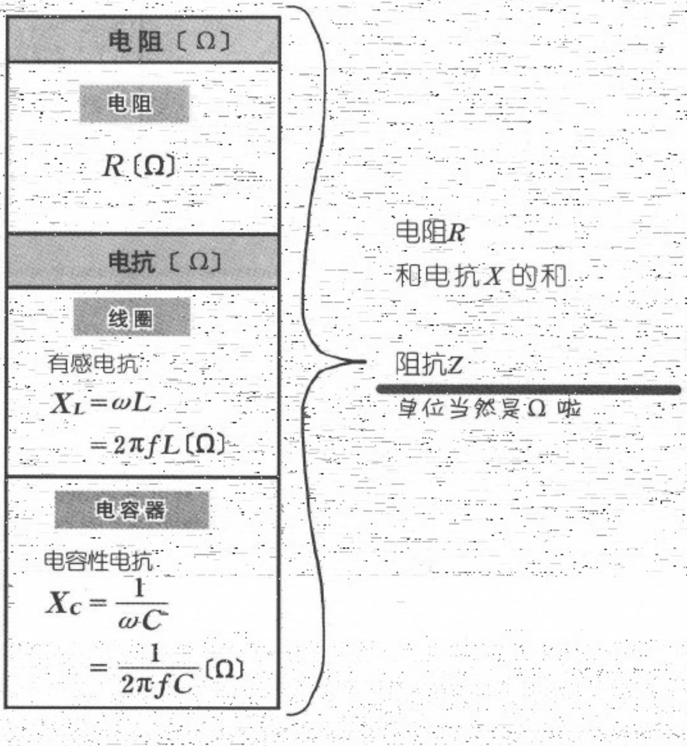
电　路	矢量（以电压为标准）	电　阻〔Ω〕
电阻 	 同相	R〔Ω〕
线圈 	 $\vec{I}$电流迟到$\frac{\pi}{2}$(90°)	**电抗〔Ω〕** 有感电抗 $X_L=\omega L$ $=2\pi fL$〔Ω〕
电容器 	 电流领先$\frac{\pi}{2}$(90°)	电容性电抗 $X_C=\frac{1}{\omega C}$ $=\frac{1}{2\pi fC}$〔Ω〕

什么是阻抗

在对元件进行总结的同时，我们顺道学习学习“**阻抗**”吧。
阻抗的符号是 Z，被称作**阻抗** Z。

Z 啊，看起来很强势呢。总感觉很难懂……

阻抗的本来面目非常单纯，所以不需要担心什么。
所谓**阻抗，指的是电阻和电抗的和。**



电阻〔Ω〕

电阻

R〔Ω〕

电抗〔Ω〕

线圈

有感电抗

$$X_L=\omega L$$
$$=2\pi fL〔\Omega〕$$

电容器

电容性电抗

$$X_C=\frac{1}{\omega C}$$
$$=\frac{1}{2\pi fC}〔\Omega〕$$

电阻R
和电抗X的和

阻抗Z

单位当然是Ω啦

什……什么啊，就这么简单啊。
也就是说，阻抗 Z 指的是**交流电路中电阻的总和**。

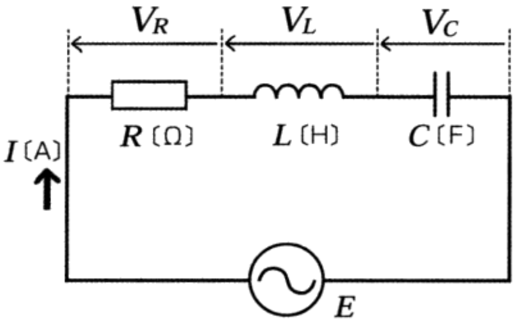
说的很对。类似“请求出阻抗 Z 的值”这样的问题也是非常常见的。
到时候我们就顺道进行解答看看哈。真的很期待呢！

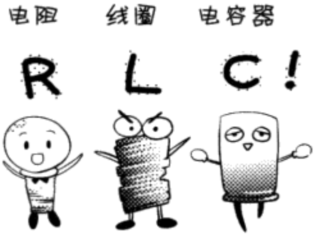
利用矢量分析相位

好了，接下来我们开始谈论一个非常非常重要的话题。

到目前为止，我们一个一个分别学习了交流电中元件的作用。

但是，这些都不过是些基础知识。在现实生活中的电气电路中，出现的问题都是 3 个元件**进行不同形式的组合**，具体来说是下面这个样子的。





因为是交流电路，所以电源电压 e，电流 i，电压降 v_R、v_L、v_C 都可以用小写字母来表示。

哦！

这个电路被称作“*RLC* **串联电路**”。

就像电路名称所展示的那样，在这个电路中，电阻 R、线圈 L、电容器 C 是串连在一起的。

既有电源电压 E，又有 3 种电压降 V，看起来跟讲基尔霍夫第二定律时所见到的电路（请参考第 62 页）很相似，但实际上完全不同！

因为不是直流电源而是交流电源，所以难易度有着天壤之别。

例如，如果要求出电源电压 E，那么

$$V_R + V_L + V_C = E\text{（根据基尔霍夫第二定律）}$$

如果只是把数字简单地代入上述公式并进行加法运算的话，得到的结果可不是什么正确答案！

这其中的原因，你知道是为什么吗？

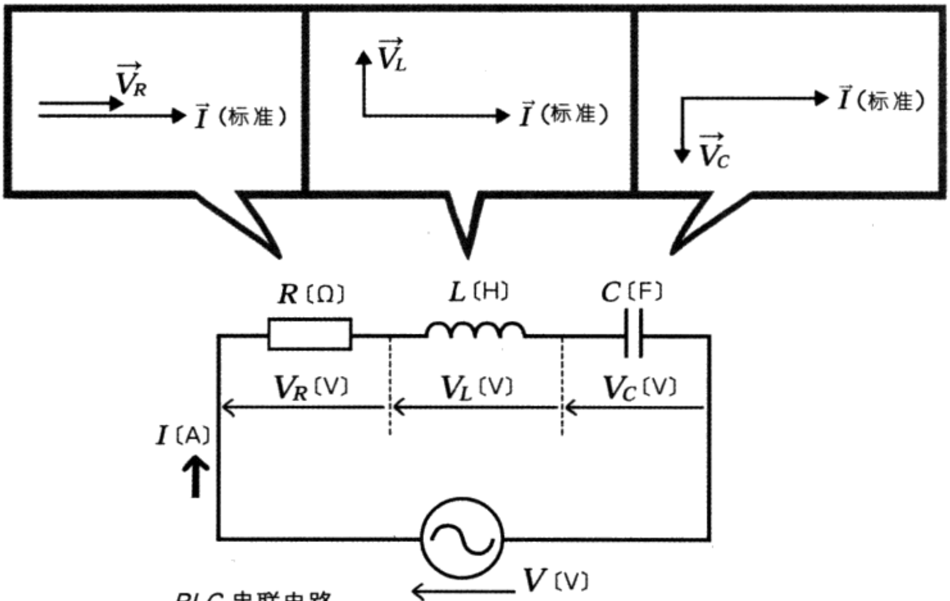
呃，因为这是**交流电**，所以**线圈和电容器中应该存在相位。**

所以，实际上进行计算的时候，还必须考虑到相位这个因素。

所谓相位，也就是**矢量**的方向……对吧。

是的。关键就是**矢量的使用方法**。
在交流电路中，涉及线圈和电容器，就会涉及相位的问题。
矢量的方向可真是乱七八糟啊。请看！

表示跟不同的元件相关的电流和电压关系的矢量图
（这次因为要求出电压的值，所以以**电流为标准**）



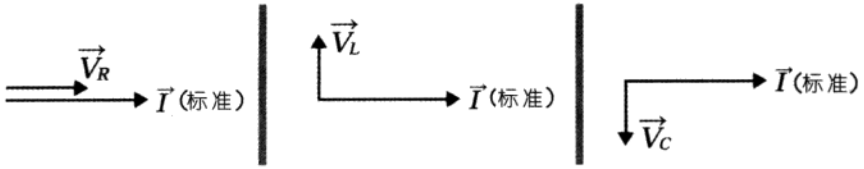
RLC 串联电路

哈哈。这个图跟上页的不同，是**以电流为标准**的矢量图。
嗯，你说的没错，矢量的方向的确有点乱七八糟，这该怎么办呢？

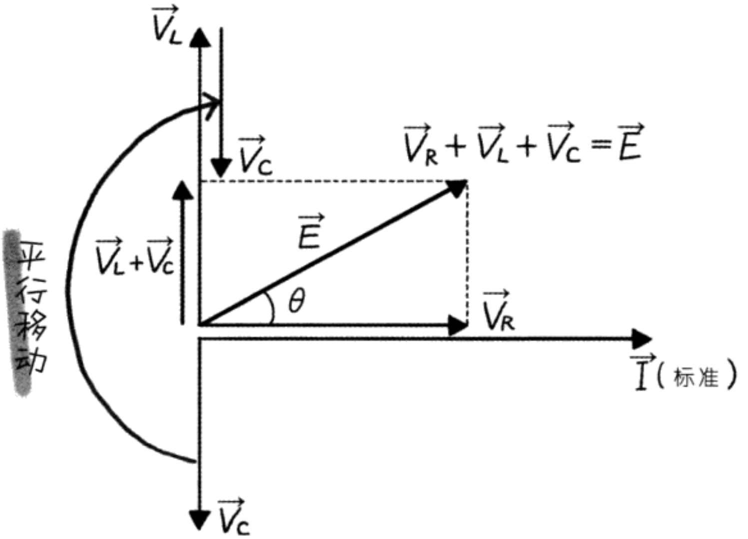
分析方法非常简单。
在代入数字之前，只要**把这些矢量先进行相加就可以了**。

啊，这么说来，的确有矢量的加法计算这回事儿呢。
好像的确学过“**矢量的和**”什么的呢，在高中里学过的吧……

是的是的，就是在高中学的。
接下来我们就来看看这三个矢量相加后是什么样子。
首先请回忆一下矢量的使用方法。



因为这个缘故，把三个矢量进行配置并求和的过程如下图所示。
矢量的平行移动和矢量的合成都是非常重要的知识，青沼君，你还记得吗？



表示电压和电流关系的矢量图

关于矢量的知识我还些许记得一些，好像应该是这样的。噢……

【第 1 步】 把在纵轴上方向完全相反的两个矢量 $\vec{V}_L$ 和 $\vec{V}_C$ 合成一个矢量。为此，需要把 $\vec{V}_C$ 进行平行移动。

【第 2 步】 这样就求出了 $\vec{V}_L+\dot{V}_C$。

【第 3 步】 求出 $\vec{V}_L+\vec{V}_C$、$\vec{V}_R$ 这两个矢量的和。

【第 4 步】 求出平行四边形的对角线，$\vec{V}_L+\vec{V}_C+\vec{V}_R$，这样一来，三个矢量的合成矢量就求出来了。

就是这个感觉，对吧？

完全正确！平行移动在矢量计算中意义重大。
另外，在求取矢量总和的过程中，一定要记得**活用对角线**。

还有，既然讲到这里了，那就顺便记住以下这两个公式的不同之处吧。

$$V_R + V_L + V_C = E$$

只是单纯地相加

→ 交流电路中这样不行!

$$\vec{V}_R + \vec{V}_L + \vec{V}_C = \vec{E}$$

通过矢量把
相位考虑在内

→ OK!

是！虽然看起来非常相似，但实际上完全不同。
通过矢量来决定是否考虑相位的问题。
这是解决**交流电问题**的关键知识点。

说的没错。在解答交流电的问题时，矢量是不可或缺的工具。
顺便说明一点，在解答电气数学的相关问题时，通常会用到**复数矢量**。
通过使用复数矢量，各种各样的情况都能变得非常容易解决，非常便利。

咦，复数矢量不就是画在复数平面上的矢量 j 吗？
那个家伙真的那么便利吗？

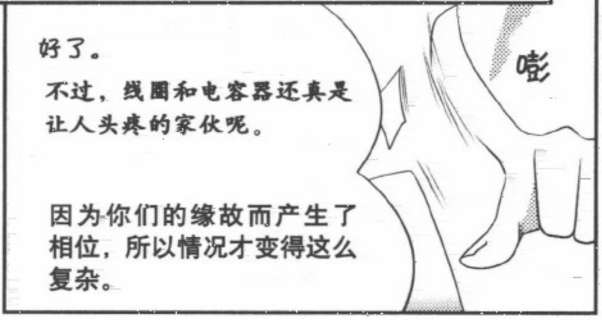
哈哈！详细内容我们将在讲复数的时候进行说明。
总之，今天的青沼君请先掌握矢量相关的知识。
如果不能记仔细了，可是会被逮捕的哦！

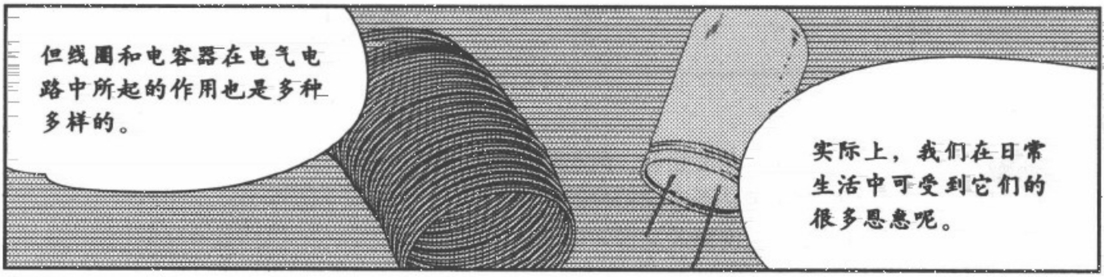
（警官情节，又来了啊……）

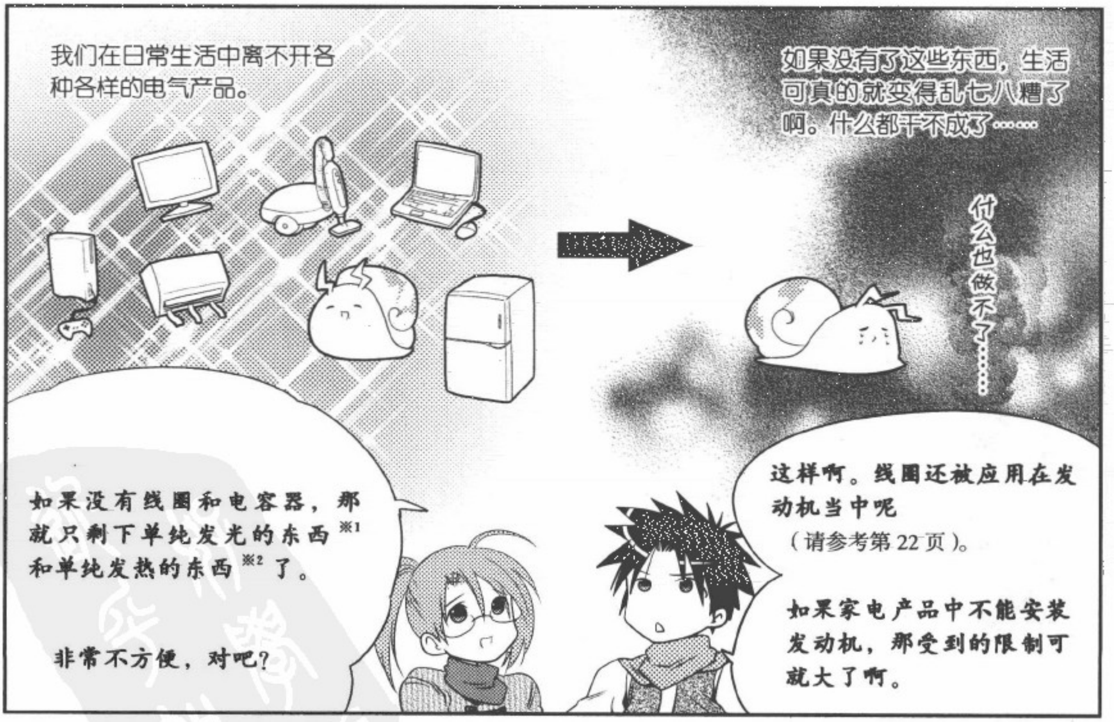
……

（害羞了，所以情绪一下子低落了下来……）

家电产品中不可或缺的东西是什么





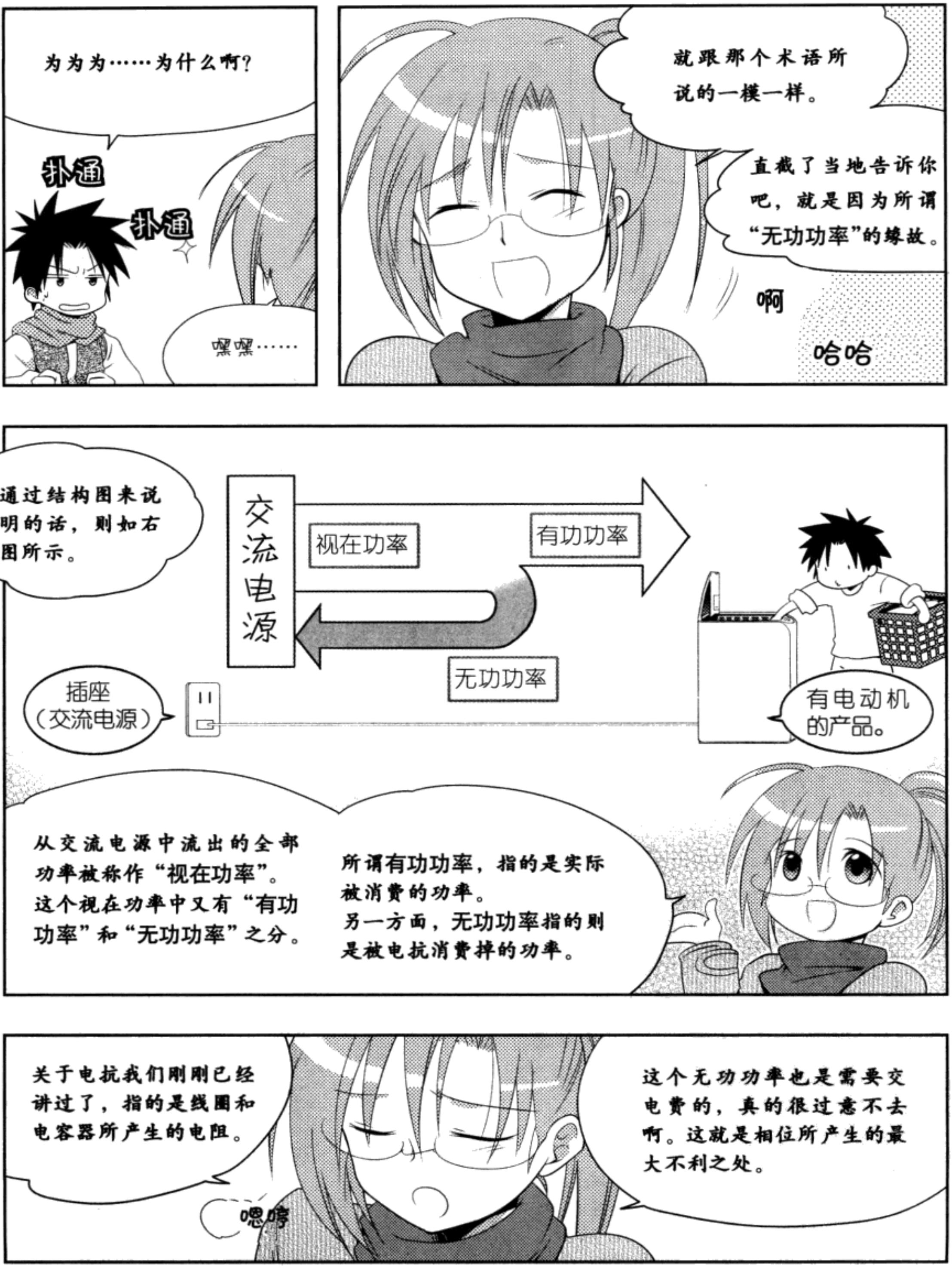


※1 不是荧光灯，仅限于白炽灯。 ※2 仅限于不能进行温度调节的产品。

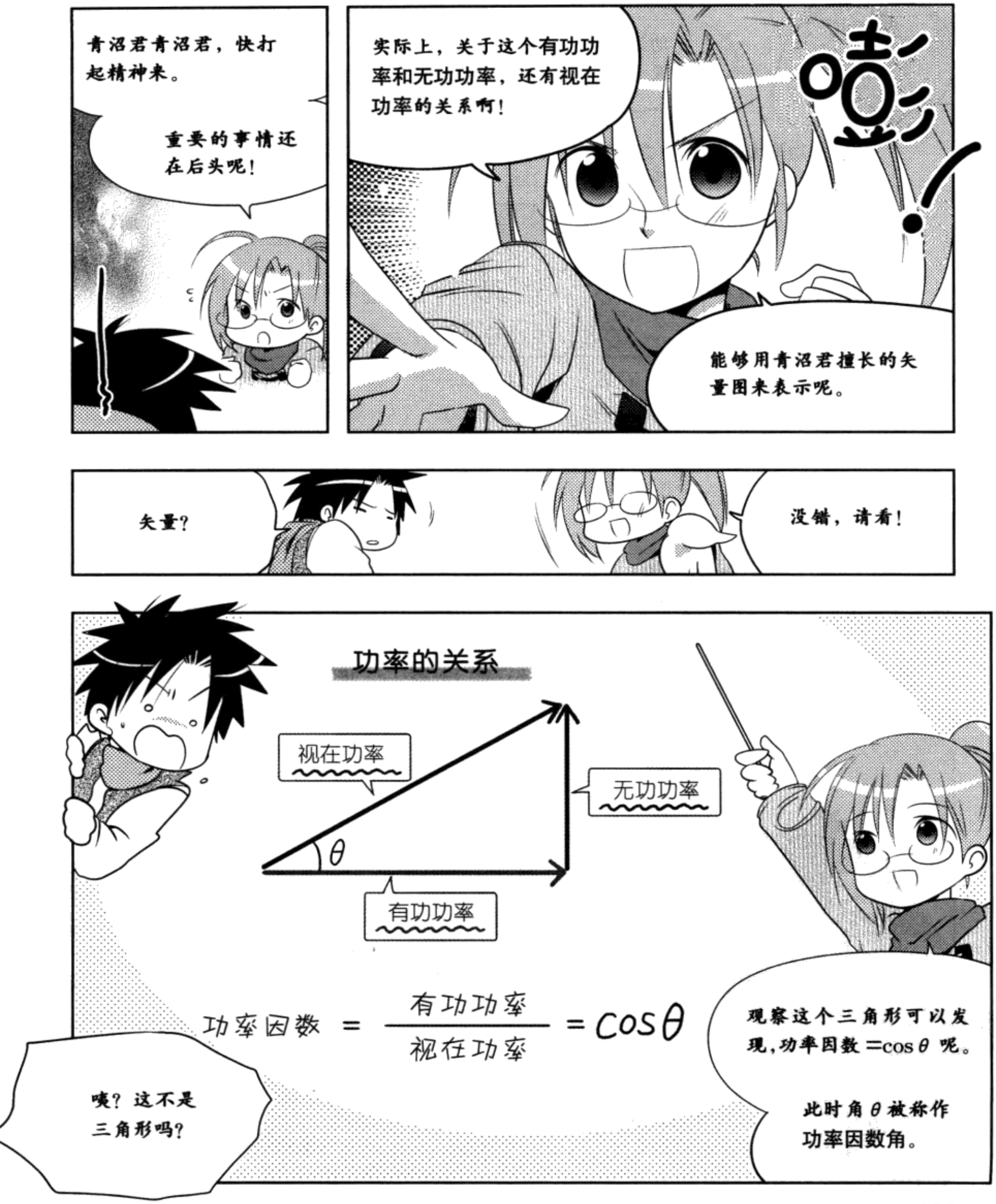

虽然是把交流电变复杂的原因所在，但却是电气电路中不可缺少的组成部分。
R〔Ω〕
L〔H〕
C〔F〕
如果不知道线圈和电容器的这些性质，就不可能正确解答交流电的相关问题。
正是线圈和电容器这些东西，才是我们电气时代的现代生活中所不可或缺的物品啊。
这么想来，我还真觉得应该亲近他们，或者应该感谢他们了呢。
不仅如此，看习惯了之后，我还真觉得他们非常可爱呢。
可爱？
你在说什么啊，青沼君？
能称得上可爱的可只有小电君啊，不是吗？
小电君至上主义！
……
？

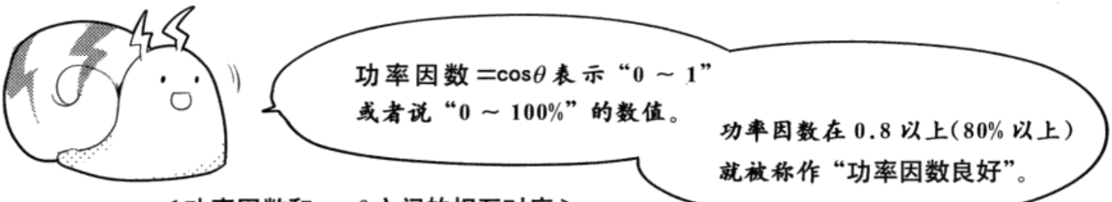
功率因数


好了，接下来我们开始谈谈“功率”这个话题。
功率！
求取功率的计算公式是什么来着？
是电压 × 电流（请参考第 19 页）……好像不是吧？
这么说来，关于功率的话题还是第一次谈起呢。
嗯，是的。
而且，接下来我们要谈论的话题，对于我们电力公司来说可是有点恐怖的话题呢。
恐……恐怖？
举个例子，你在家里所使用的家电产品中都有发动机“线圈”，对吧？
是的，洗衣机或者电冰箱
都使用它呢！
这些家电所使用的从电源引来的功率，
实际上在半路上会慢慢减少呢！


为为为……为什么啊?
扑通
扑通
嘿嘿……
就跟那个术语所说的一模一样。
直截了当地告诉你吧，就是因为所谓“无功功率”的缘故。
啊
哈哈
通过结构图来说明的话，则如右图所示。
交流电源
视在功率
有功功率
无功功率
插座（交流电源）
有电动机的产品。
从交流电源中流出的全部功率被称作“视在功率”。这个视在功率中又有“有功功率”和“无功功率”之分。
所谓有功功率，指的是实际被消费的功率。另一方面，无功功率指的则是被电抗消费掉的功率。
关于电抗我们刚刚已经讲过了，指的是线圈和电容器所产生的电阻。
嗯哼
这个无功功率也是需要交电费的，真的很过意不去啊。这就是相位所产生的最大不利之处。


哎呀，青沼君，真是难得呢！
你这次怎么没说“相位这家伙”这类的话啊？
……
不是……更重要的是，我总觉得这个无功功率的形象跟我有些相似之处。
所以有点想发火却发不出来的感觉……
？？
就像好不容易来到了学校大门口，却没心思学习，吊儿郎当地又回家了。对于这一形象，我总觉得……
学校
无功
回家……
好好学习！
是！
有功
啊，原来如此。就类似于逮捕方法哈。
全部加起来就是 视在
认真上课的学生们就跟有功功率一样啊！
嗯，嗯！
在所有的功率（视在功率）中，实际被消费的功率（有功功率）的比率被称作“功率因数”。
这个功率因数的数值越大越好。
所以说，你的这个比喻也不能说完全不恰当，也可以这么说哦，而且简单易懂……
闷闷不乐
是……是吗？
自言自语地说，你说的这话还真刺耳……


青沼君青沼君，快打起精神来。
重要的事情还在后头呢！
实际上，关于这个有功功率和无功功率，还有视在功率的关系啊！
嘭！
能够用青沼君擅长的矢量图来表示呢。
矢量？
没错，请看！
功率的关系
视在功率
无功功率
θ
有功功率
$\text{功率因数} = \dfrac{\text{有功功率}}{\text{视在功率}} = \cos\theta$
咦？这不是三角形吗？
观察这个三角形可以发现，功率因数＝cos θ 呢。
此时角 θ 被称作功率因数角。



＜功率因数和 cosθ 之间的相互对应＞

（这个表格是通过三角函数求出来的。详细内容请参考第 140 页。）

角度	0°	30°	45°	60°	90°
cosθ	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$ ≈ 0.87	$\frac{1}{\sqrt{2}}$ ≈ 0.70	$\frac{1}{2}$ $= 0.5$	0
功率因数	1 (100%)	0.87 (87%)	0.70 (70%)	0.5 (50%)	0 (0%)

← 80% 以上

功率因数良好

产生无功功率的结构

接下来我来解释一下**为什么相位会产生无功功率**。
请一边回忆计算公式“**功率 = 电压 × 电流**”，一边观察下面的图。

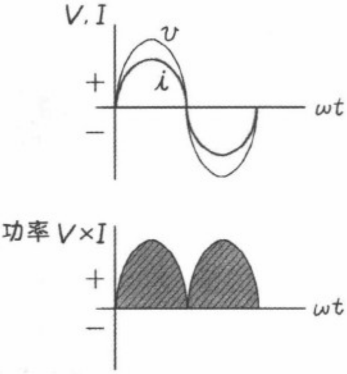


图 a 没有相位的情况

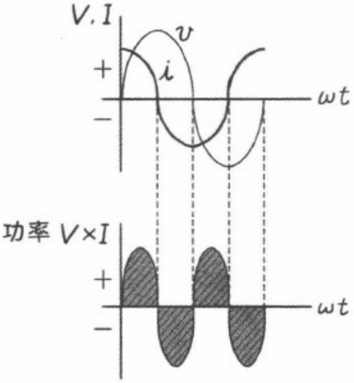


图 b 有相位的情况

引自电气主任技术师（即电工——译者注）http://denk.pinpin.jp/jitumu/yuukoumukou.html，部分进行了修正。

图 a 是没有相位的情况。

功率（正值）= 电压（正值）× 电流（正值）或者
功率（正值）= 电压（负值）× 电流（负值），

功率通常都是正值。

然而，图 b 所示是有相位存在的情况。
正和负交叉出现，因此功率也出现了负值的情况。
这个**负值的功率**就是**无功功率**。

哇哦！天啊，真理本身原来是这么得简单纯粹啊。

从上图中还能看出，“如果相位小，那么无功功率也小”。
另外，“如果无功功率小，那么功率因数的状态也会更好”。
啊，也就是说，“如果相位小，功率因数的状态也会更好”喽！

关于**相位和功率因数**的关系我也弄得清清楚楚啦！


关于三角函数和矢量我们就学到这里……
阿嚏
接下来我们首先休息一下，然后讲讲复数……
阿嚏
没、没问题吧？
今天就到此结束吧，免得感冒了。
不，一定要在今天讲完！无论如何，都要在今天把复数的知识讲完！
慢慢腾腾地
啊哇
啊哇
三角函数、矢量和复数是相互关联的量，所以，最好不要有任何间隔，一口气讲完最好。
喀喀
我明白了！我明白了！我明白了！
啊哇
这个人也真是的。
一说到电气的话题就热血沸腾。
对周围的环境完全视而不见了呢。
呼～镇定自若，无动于衷

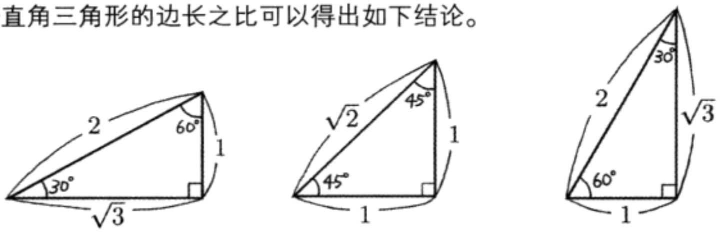

……嗯，我家就在附近，
要不去我家里学习吧？
啊
！
……青沼君，如果方便的话……
真的可以吗？
终于还是说出来了啊，我我我！
是……
那我们出发吧！
哇啊啊啊……哇啊啊啊……
呀，啊，嗯……我……我没问题啊。
好的啊。
慌慌张张地

~三角比、三角函数的公式~

在电气数学领域，三角函数是不可或缺的。
交流电是 sin 曲线，功率因数角（相位角）是 $\cos\theta$ 。
在解答交流电的问题时，也需要进行三角函数的计算。

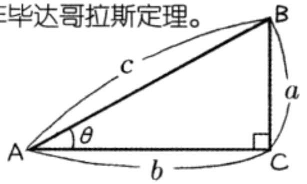
然而，在这里有一个问题需要特别注意，那就是三角函数的计算具有独特性。
例如，$\cos(\alpha+\beta)$ 并不等于 $\cos\alpha+\cos\beta$。
正确答案是 $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$。
如上所述，接下来我们就把关于三角函数等知识的重要公式进行归纳总结，并作详细介绍。

【三角比】根据直角三角形的边长之比可以得出如下结论。



角度/(°)	30°	45°	60°
sin	$\sin 30° = \frac{1}{2}$	$\sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cos 60° = \frac{1}{2}$
tan	$\tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$	$\tan 45° = \frac{1}{1} = 1$	$\tan 60° = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$

【勾股定理】
也被称作毕达哥拉斯定理。



$$a^2+b^2=c^2$$

【经常使用的公式、相互关联的公式】
体现三角函数相互关系的公式。

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$$

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

【加法定理公式】是必须要记住的公式。因为很多公式都是以这个公式为基础推导出来的。

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

---

tan 的公式通过代入推导出来

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta} \longleftarrow \text{代入}\tan(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}$$

$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta} \longleftarrow \text{代入}\tan(\alpha-\beta) = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}$$

【2 倍角公式】把 $\alpha=\beta$ 代入加法定理公式中就能得出 2 倍角的计算公式。

$$\begin{aligned} \sin 2\alpha &= 2\sin\alpha\cos\alpha & \longleftarrow\ & \sin(\alpha+\alpha) = \sin\alpha\cos\alpha + \cos\alpha\sin\alpha \\ \cos 2\alpha &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha & \longleftarrow\ & \cos(\alpha+\alpha) = \cos\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\sin\alpha \\ &= 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha & \longleftarrow\ & \sin^2\alpha = 1-\cos^2\alpha,\ \cos^2\alpha = 1-\sin^2\alpha \end{aligned}$$

【半角公式】根据 2 倍角的公式推导出半角公式。

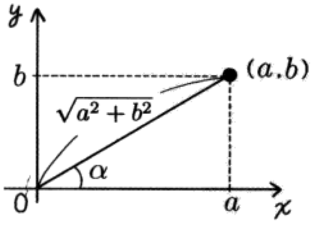
$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2},\quad \cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}$$

【三角函数的合成公式】能够利用加法定理进行证明。

$$a\sin\theta + b\cos\theta = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$$

只是

$$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$



【3 倍角公式】根据加法定理和 2 倍角公式推导出来。

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$$
$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$

$$\begin{aligned}\sin 3\alpha &= \sin(\alpha+2\alpha)\\ &= \sin\alpha\cos 2\alpha + \cos\alpha\sin 2\alpha \longleftarrow \text{加法定理}\\ &= \sin\alpha(1-2\sin^2\alpha) + \cos\alpha\cdot 2\sin\alpha\cos\alpha \longleftarrow 2\text{倍角}\\ &= \sin\alpha(1-2\sin^2\alpha) + 2\sin\alpha(1-\sin^2\alpha)\\ &= 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos 3\alpha &= \cos(\alpha+2\alpha)\\ &= \cos\alpha\cos 2\alpha - \sin\alpha\sin 2\alpha \longleftarrow \text{加法定理}\\ &= \cos\alpha(2\cos^2\alpha-1) - \sin\alpha\cdot 2\sin\alpha\cos\alpha \longleftarrow 2\text{倍角}\\ &= \cos\alpha(2\cos^2\alpha-1) - 2(1-\cos^2\alpha)\cos\alpha\\ &= 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha\end{aligned}$$

利用欧拉公式证明 3 倍角公式（习惯了计算后可以自己证明看看）。

因为 $e^{jx} = \cos x + j\sin x$

所以 $e^{j3x} = \cos 3x + j\sin 3x = (\cos x + j\sin x)^3$ $(A+B)^3 = A^3+3A^2B+3AB^2+B^3$

$= \cos^3 x + j3\sin x\cos^2 x - 3\cos x\sin^2 x - j\sin^3 x$

$= \{\cos^3 x - 3\cos x\sin^2 x\} + j\{3\sin x\cos^2 x - \sin^3 x\}$

（因为 $\sin^2 x = 1-\cos^2 x, \cos^2 x = 1-\sin^2 x$ ）

所以 $e^{j3x} = \{\cos^3 x - 3\cos x(1-\cos^2 x)\} + j\{3\sin x(1-\sin^2 x) - \sin^3 x\}$

$= (\underline{4\cos^3 x - 3\cos x}) + j(\underline{3\sin x - 4\sin^3 x})$

$= \cos 3x + j\sin 3x$

根据这个公式的实部可知　根据这个公式的虚部可知

$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$　　$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$

我们自己动手来推导加法定理吧！（这个非常便利！就算忘记了科斯摩丝记忆法也没关系）

$e^{j(x+y)} = e^{jx}\cdot e^{jy} = \cos(x+y) + j\sin(x+y)$ —— ①

$= (\cos x + j\sin x)(\cos y + j\sin y)$

$= \underline{\cos x\cos y - \sin x\sin y} + j(\underline{\cos x\sin y + \sin x\cos y})$ —— ②

根据①和②的实部可知　　根据①和②的虚部可知

$\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y$　$\sin(x+y) = \cos x\sin y + \sin x\cos y$

第 4 章

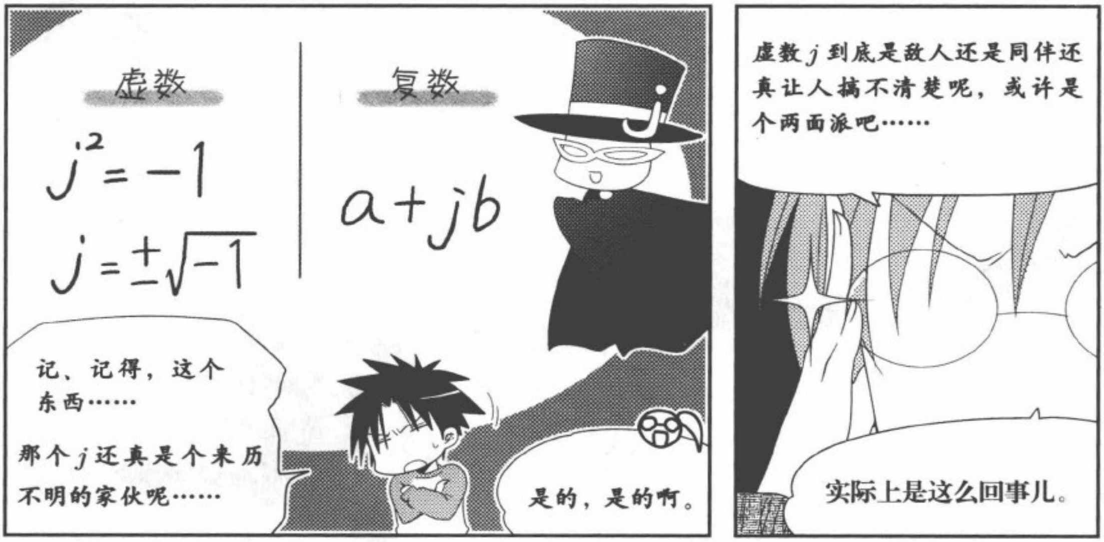
复 数


可铃铃
请……
请进！
……
那——我可进来了哦。
这次有电了哈。跟那次的感觉完全不同呢。
感动……
那、那次真是承蒙您关照了。
有没有什么东西，她看见之后会感兴趣呢？
应该没有什么奇怪的地方吧。
啪啦
啪啦
？
除了妈妈之外，这还是第一次有外人进我屋呢！
呜哇！我该怎么办才好啊？
？


你怎么了啊，青沼君？
我们快点开始吧。
今天要讲的虚数和复数可是电气数学领域中最有意思的一部分了！
……
啊，是嘛。
对于你来说，就像是去做家庭教师或者去学生家里进行家访一样的感觉啊。
哈哈……
可我意识到的却都是些乱七八糟的问题呢……
真是的，唉！
我都在想些什么啊？
?
青沼君？
我们开始吧？
啊，是，是。对不起！
我们开始吧，快开始吧！

1 复数的性质

虚数是同伴



虚数的乘法运算

首先我们来做一些简单的计算。
用实数 1，依次乘以 j 的 n 次方后，其计算结果如下所示。

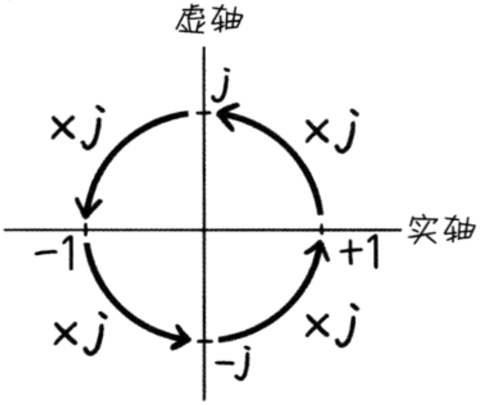
$$1\times j = j$$
$$j\times j = j^{2} = -1$$
$$j^{2}\times j = j^{3} = -j$$
$$j^{3}\times j = j^{4} = j^{2}\times j^{2} = 1$$

总结一下就是

$$1\times j = j$$
$$j^{2} = -1$$
$$j^{3} = -j$$
$$j^{4} = 1$$

嗯，嗯，的确是这么个结果呢。

然而，有趣的还在后头呢。
我们把刚才进行的计算在**复数平面**上表示出来，则如下图所示！（关于复数平面的详细内容请参考第 48 页）
叮咚！



$$1\times j = j$$
$$j^{2} = -1$$
$$j^{3} = -j$$
$$j^{4} = 1$$

在复数平面上，1 依次乘以 j 的 n 次方之后的情况

呀呀呀呀！怎么成了按**逆时针方向进行的旋转**啊！

是的。
实际上，**虚数 j 的乘法运算其实就是按逆时针方向旋转 90°！**

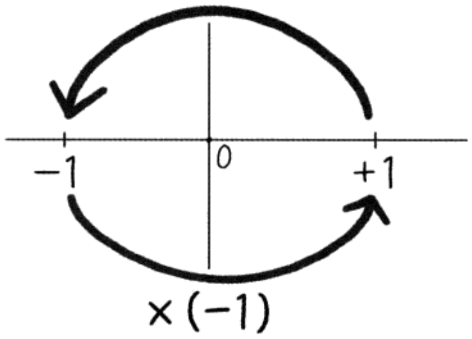
……乘、乘法就是旋转？
这跟我们平时所使用的实数的乘法运算完全不同呢。

或许这的确是让人很不习惯的分析方法。
但是，借助于复数平面这个平台，我们能够弄明白很多很多有趣的知识呢。
例如，我们早就学过，**负负相乘得正**，对吧？

嗯。我也想起来了，的确是这么回事儿。
例如，$-1\times(-1)=+1$，这应该算是数学常识了吧……
可是，仔细想想的话，还真弄不明白这是为什么呢。嗯！

关于这个问题不需要考虑太多。
借助于复数平面这个平台，**负负相乘得正的情况**就一目了然了。
请看！

乘以 j^2 也就是 ×（−1）



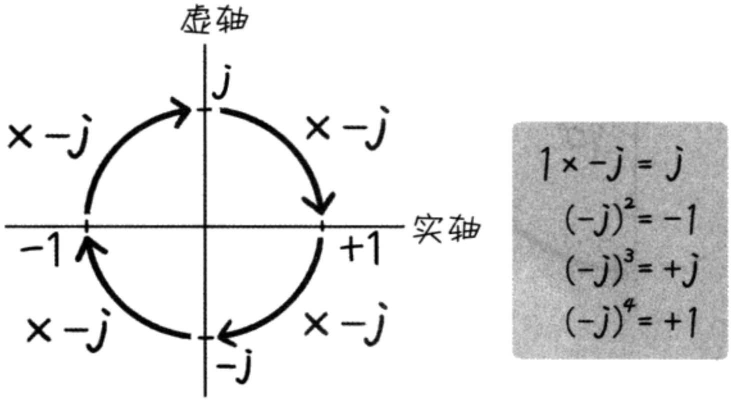
在复数平面上，乘以 j^2 的情况

哇！
还真是呢，负数乘以负数就等于旋转了一周，变成了正数。
有种**反面 × 反面 = 复位**的感觉啊！
另外，通过这个图我还弄明白了一个问题，那就是“为什么 j 的平方等于负 1”。
还真有趣呢。

哈哈。如上所述，**虚数和复数平面可是数学能够成立的划时代的分析方法。**

哦。
就像变魔术一样啊。

那就再让你多观看几场魔术表演吧。
这次，我们用实数 1 依次乘以 –j 的 *n* 次方而不是 j。
其计算结果如下所示。



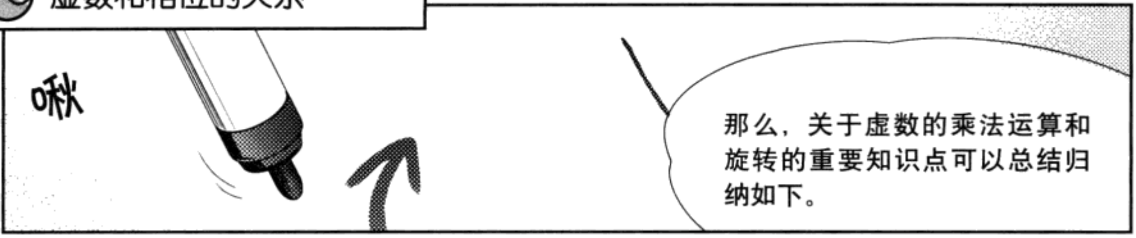
在复数平面上，1 依次乘以 –j 的 *n* 次方后的情况

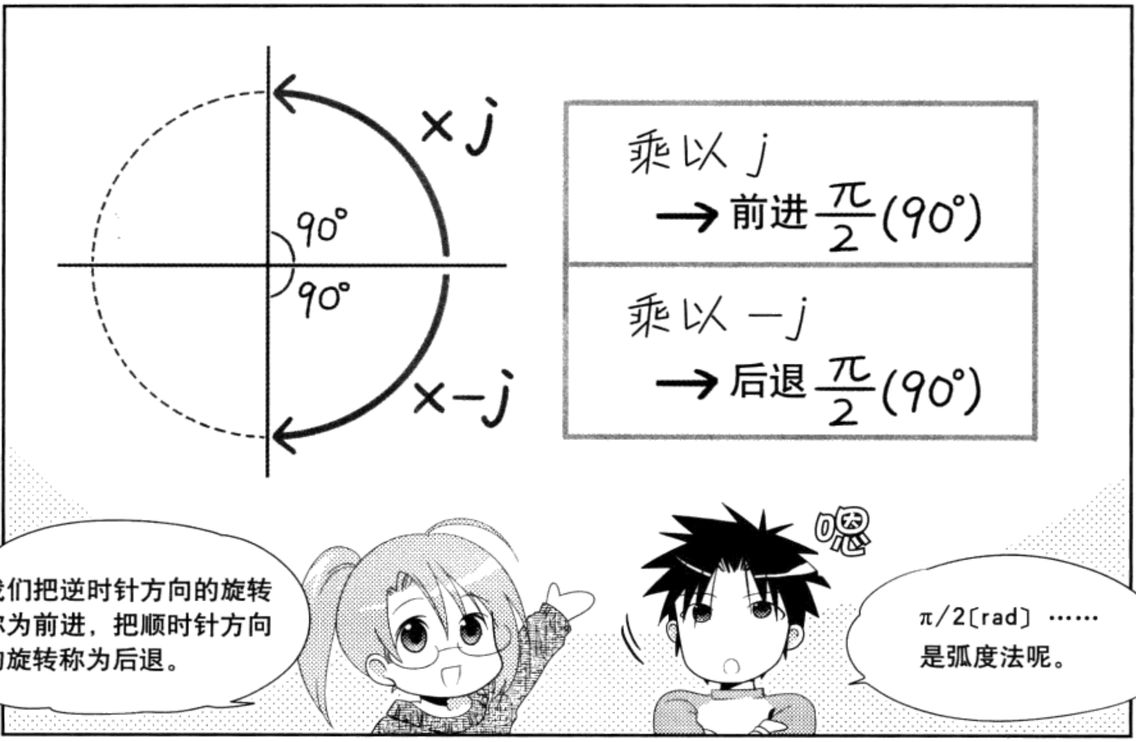
这次跟刚才的情况正好相反！
是按顺时针方向旋转 90° 啊！

是的。如上所述，**乘法运算产生 90° 的旋转正是虚数 j 所具有的有趣性质。**
而且，这个性质在解答电气数学的问题时起着非常重要的作用。

乘以 j 就等于逆时针方向旋转，乘以 –j 就等于顺时针方向旋转。
是起这样的作用吧？
嗯，我脑子里面现在就已经开始滴溜滴溜乱转了。

虚数和相位的关系


啾
那么，关于虚数的乘法运算和旋转的重要知识点可以总结归纳如下。

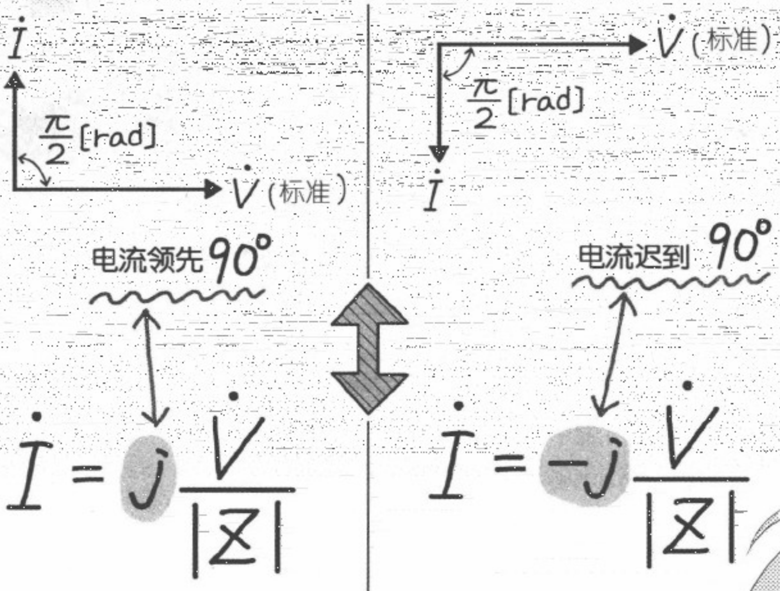

×j
90°
90°
×−j
乘以 j
→前进 $\frac{\pi}{2}$(90°)
乘以 −j
→后退 $\frac{\pi}{2}$(90°)
我们把逆时针方向的旋转称为前进，把顺时针方向的旋转称为后退。
嗯
π/2〔rad〕……是弧度法呢。


嗯？我怎么觉得，这种感觉怎么这么熟悉啊。
前进 90°，或者后退 90°……
啊。


是相位！在用矢量表示相位的时候说过类似的话啊。
回答正确！
那么，请看这里！

实际上，"相位"能够通过虚数 j 表示出来。

矢量的关系（图形）也能够用简单的复数（数学公式）表现出来哦。



$$\dot{I} = j\frac{\dot{V}}{|Z|}$$

$$\dot{I} = -j\frac{\dot{V}}{|Z|}$$

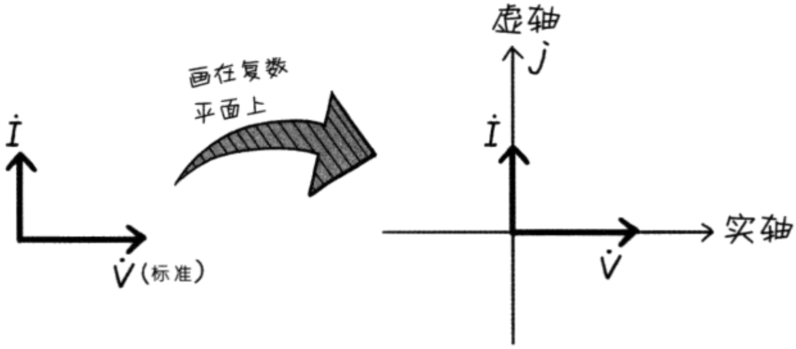
※ 在这种情况下，请把 $|Z|$ 看做 $\dot{I}$ 和 $\dot{V}$ 大小的量。详细内容请参考第 153 页。

因此，今后需要熟练掌握复数的使用方法。

而且，关于矢量，今后我们要用到的主要也是复数矢量。

不需要把这个问题想得太复杂。

把矢量在复数平面上画出来就是复数矢量。



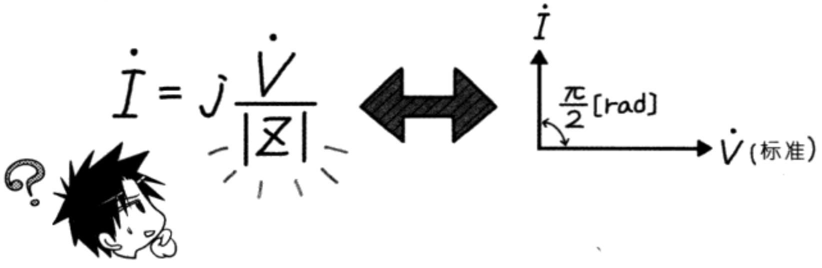
“复数”和“复数矢量”可是一一对应的，对吧（请参考第 49 页）。

因此可以说，**复数的计算同时也是复数矢量的计算。**

关于算式的补充说明

刚刚出现过｜Z｜这个算式，接下来就来解释一下这个算式的意思。
首先，Z 指的是**阻抗**，是交流电路中**电阻的总和**。（请参考第 125 页）

加上绝对值符号后，｜Z｜指的则是电阻的大小。
但是，为什么在这里突然说起阻抗来了呢？
矢量图中，可只有电流 $\dot{I}$ 和电压 $\dot{V}$ 啊。



哈哈。实际上，为了**整顿 $\dot{I}$ 和 $\dot{V}$** 的大小，我们才引进了阻抗（电阻的总和）｜Z｜这个量。
因为电流 I 和电压 V 的单位不同，**所以没法直接比较这两者之间的大小关系。**
例如，速度和距离这两个量，因为两者的单位不同，所以没法比较两者之间的大小。这其中的道理是一样的。

嗯，的确是这样呢，如果单位不同，就没法比较两者之间的大小关系。
……那个？可是，如果只有速度和距离的话，的确没法比较两者的大小，但只要在两者之间加上“时间”这个量，就能够把它们**归结到一个算式中**了呢。
因为速度〔km/h〕= 距离〔km〕/ 时间〔h〕。

对！就是这么回事儿。在这里我希望你回忆起来的是欧姆定律。
与 $I = V / R$ 一样，｜I｜ = ｜V｜ / ｜Z｜也同样成立。

啊，原来如此！利用这三个量之间的关系，就能够把 I 和 V 归结到一个算式中了啊。所以，｜Z｜的出现就变得很必要了。

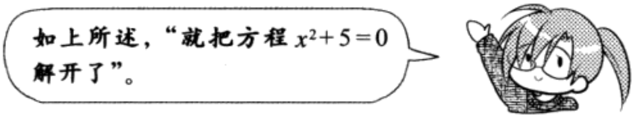
是的。｜Z｜归根结底是为了**整顿 I 和 V 的大小**而引进的量。
另外，**为了整顿矢量的方向**，我们引进了 j 和 –j。

虚数为什么会产生

嗯，关于虚数 j 在解答交流电的问题中所起的作用，我已经很清楚了。
但是，虚数到底是谁因何而发明的呢？

这个问题还真挺让人费神呢。虚数出现于 16 世纪。
之所以会出现，是为了解答**没有答案的问题**。

$$x^2+5=x^2-(-5)=(x+j\sqrt{5})(x-j\sqrt{5})=0$$



也就是说，只要有一个“**平方等于负 1 的数字**”，那么无论怎样的二次方程都会有解！

哇塞……硬是解答出来了呢。

是啊，如上所述，虚数就是这样经历了艰难险阻才出现在人们的面前……
令人遗憾的是，当时的数学家们并不接受这个虚数存在。
当时的虚数，**只不过是一个概念性的存在**，即**平方等于负 1 的数字**，并没有什么特别的实用价值。
虚数这个存在被写进书本之后，又被闲置了接近 200 年。
虚数还真可怜呢……

好像投入真感情了……

然后，数学家莱昂哈德·欧拉（1707 ～ 1783 年）闪亮登场了。
欧拉被认为是 18 世纪最伟大、成就最高的伟人，就是这位欧拉先生把 $\sqrt{-1}$ 确定为虚数单位 i（在电气领域中是 j）。
另外，欧拉于 1748 年正式发表了“**欧拉公式**”，这个包含有虚数的公式非常非常重要。关于这个公式，我们将在后面进行详细讲解。

哦。多亏了这位欧拉先生，才发现了这个**跟虚数相关的公式**。

是的。然而，就在欧拉之后，虚数的存在仍然没有被人们所接受。
这是因为，**虚数不能够用图形来表示**，人们对它没有具体的印象。

……这个？但是，刚才我们不是在复数平面上把它的示意图画出来了吗？

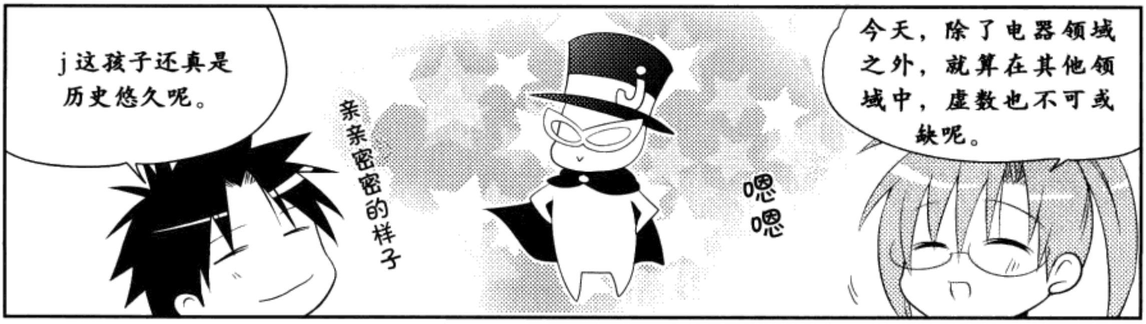
说的没错！实际上，在这之后，又出现了复数和复数平面。
借助复数平面，虚数才第一次用图形体现出来，从而变成了能够用眼睛看到的样子。到此为止，虚数才真正获得了“民权”啊。

哎，原来如此！虚数终于能够站到阳光之下了呢。

复数平面别名**“高斯平面”**，这是人的名字。
关于复数平面，很多人都曾经试图组建过，但其中成绩最出类拔萃的是数学家约翰·卡尔·弗里德里希·高斯（1777—1885 年），所以复数平面又被称作高斯平面。
如上所述，虚数、复数和复数平面就这样产生了。
接下来，把这些工具**应用到交流电路的计算**中这一划时代的思考方法纷纷出现。

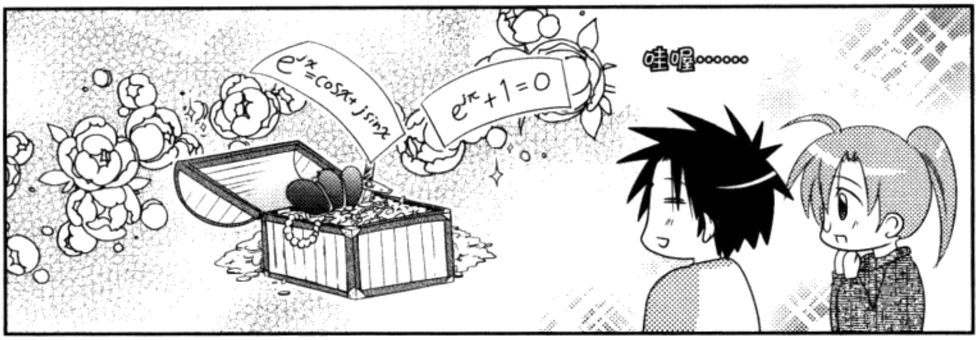
1886 年，英国的赫维赛提出把复数应用到交流电路的计算当中。
1893 年，英国的肯尼利展示了用复数表示阻抗并进行计算的过程。
同年，美国的技术人员斯坦梅茨完成了关于用虚数 $j=\sqrt{-1}$ 计算交流电路的理论研究，并发表了相关论文。

如上所述，虚数和复数就这样被引进了电气领域。



2 能够用复数表示的重要公式

欧拉公式



接下来我们介绍那个使用了虚数的非常非常重要的公式。
“欧拉公式”和“欧拉恒等式”。

嗯？这两个名字听起来很相似啊。

是的。这也是理所应当的事情。因为**欧拉恒等式**是**欧拉公式**稍微变形之后得到的公式。因此，我们把它们捆绑在一起学习吧。
顺便说明一下，某个物理学家曾经声称这个公式是**“我的至宝”**。

呀，最宝贵的东西啊！这么严重！

哈哈。真的是那么美丽、那么有作用的公式呢。
好了，百闻不如一见，首先我们来看欧拉公式。

$$\underbrace{e^{jx}}_{\text{指数函数}} = \underbrace{\cos x + j\sin x}_{\text{三角函数}}$$

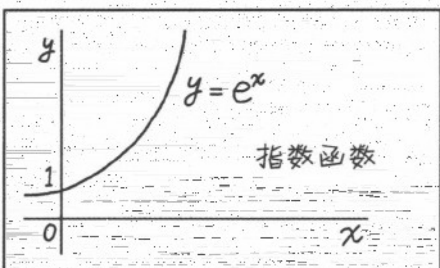
……对不起，我能不能装作没看见……看起来太难了。

不行不行！接下来我会进行解释说明，很简单易懂，所以不用担心！
这个公式的特征是，把**两个八竿子打不着的函数——指数函数和三角函数以及虚数** j 归结到了同一个等式中。

三角函数就是我们之前学过的 $\sin\theta$ 和 $\cos\theta$。

其中变化的量——变量这次不是用 θ 来表示，而是用 x 来表示。

指数函数表示为 e^x，其函数图像如下图所示。



图像的用途

- 用来表示数量呈急剧膨胀性增加的现象（如细菌的繁殖等）。
- 用于统计等领域。

请分别记住公式中每个部分的名称。

$$\underset{\text{被称作“底”}}{\underset{\sim}{e}}^{x \leftarrow \text{被称作“指数”}}$$

嗯嗯。早就已经记在心里了呢……

这个**指数**跟之前出现过的**次数**（请参考第 100 页）很相似呢。两者有什么区别吗？

这个问题提得好啊。两者的不同之处如下图所示。

指数	次数
e^x 中的 x	x^3+x^2+1 中的 3
x^6y^9 中的 6 和 9	（很多数字相加在一起）
• 除了整数之外，有时候还包含变量。	• 一般用于多项式当中，而且一般都是整数。

另外，e 是一个数学常数，被称作**奈培数**，也被称作“**自然对数的底**”。

而且，e 是一个无理数，e=2.71828 18284 59045…，后面的数字会一直延续下去。

啊……就像圆周率 π 那样，是不可能背诵下来的没有道理的数字呢。

虽然一眼看上去就像是一堆数字随便罗列在一起一样，但这个数字 e 具有很多秘密特性。

它在**函数和微分积分**等领域非常活跃，是一个使用起来非常便利的数字哦。

e 在进行计算的过程中有时候会进行如下**改写**。
一定要牢牢记住哦，就算遇到了这种新写法，也要知道他就是 e。

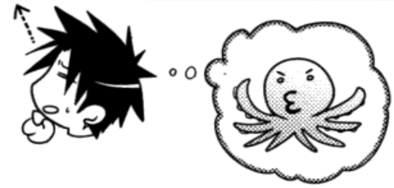
$$e^{\underset{\uparrow\,\text{指数}}{x}} = \exp(\underset{\uparrow\,\text{指数}}{x})$$

这个 exp 是“exponential= 指数的意思”的缩写。
指数函数也被称作 **exp 函数**。

原来如此。游戏中的经验值也被称作 exp，看来跟这个是两码事儿呢。

好了，关于用语的话题就到此为止，接下来开始讲电气的知识吧。
欧拉公式在**电气领域**内的写法如下所示。
喂，青沼君！请看公式。

$$\overset{\text{指数函数}}{\underline{\varepsilon^{j\theta}}} = \overset{\text{三角函数}}{\underline{\underline{\cos\theta + j\sin\theta}}}$$



嗯……作为变量的指数 x 变成了 θ 啊。
可是，e 也变成了像章鱼嘴巴形状的符号，这个我就搞不明白了！

章鱼嘴巴！这个 ε 读作艾普西隆。
只是把符号进行了替换，跟自然对数的底 e 是同一个意思。

什、什么！对了，是不是类似于把虚数 i 替换成 j 的情况啊。
在电气领域，自然对数的底写作 ε，对吧？

完全正确。欧拉公式和指数函数的 ε 在今后的课程中起着非常重要的作用，
一定要好好认清楚呀。

顺便再说明一个问题，那就是为什么指数函数变得这么重要……
这是因为，**从三角函数变换成指数函数需要进行“指数计算”**的缘故。

如果 $x \neq 0$，m 和 n 都是整数，那么以下指数法则成立。

$$x^m \times x^n = x^{m+n}, \quad (x^m)^n = x^{mn}, \quad (xy)^n = x^n y^n, \quad x^0 = 1$$

【例题】 $x^3 \times x^2 = x^{3+2} = x^5$，$(x^3)^2 = x^{3\times2} = x^6$，

$$(x^2y^3)^3 = x^{2\times3}\ y^{3\times3} = x^6y^9$$

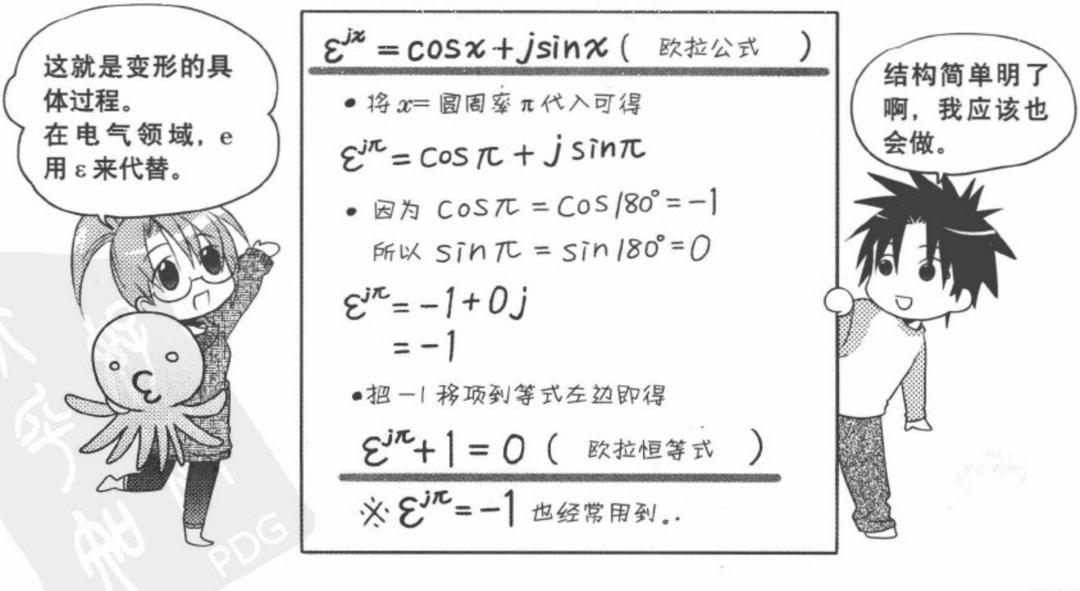
在解答电气数学的问题时，很多情况下**通过指数计算能够简化计算过程**，方便快捷。

哦哦。如果想简化计算，就要认真掌握指数计算的知识呢。

关于欧拉公式我就讲这么多。最后还得再强调一遍，绝对不能忘记的欧拉公式变形后得到的**欧拉恒等式**。

$$\varepsilon^{j\pi} + 1 = 0$$

在欧拉恒等式中，数学中非常重要的 5 个数——
“**自然对数的底** ε(e)”、“**虚数单位** j（i）”、“**圆周率** π”、“1”、“0” 全部包含在内了，具有“世界上最具魅力的公式”之美誉呢。



$\varepsilon^{jx} = \cos x + j\sin x$（ 欧拉公式 ）

- 将 x= 圆周率 π 代入可得

$\varepsilon^{j\pi} = \cos\pi + j\sin\pi$

- 因为 $\cos\pi = \cos 180° = -1$
  所以 $\sin\pi = \sin 180° = 0$

$$\varepsilon^{j\pi} = -1 + 0j = -1$$

- 把 −1 移项到等式左边即得

$\varepsilon^{j\pi} + 1 = 0$（ 欧拉恒等式 ）

※ $\varepsilon^{j\pi} = -1$ 也经常用到..

用复数表示交流电的公式

刚刚讲过的**欧拉公式**在很多情况下都起着作用。
例如，**交流电压的公式**也能够利用欧拉公式进行变形。

崭新登场!!

截至目前的公式（请参考第 36 页）

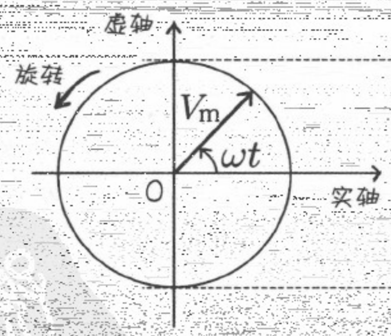
$$V = V_{\mathrm{m}}\,\varepsilon^{j\omega t} \Longleftrightarrow v(t) = V_{\mathrm{m}} \sin \omega t$$

这、这么简单啊！真是 180° 大变身呢。
“三角函数”的公式变成了用“指数函数”表示的矢量了啊！

嗯嗯，说的完全正确。青沼君对这两个函数都已经了如指掌了呢。
我再补充一句，指数函数的公式是包含虚数 j 的**复数矢量**。
能够在复数平面上画出图像来哦，具体如下图所示。

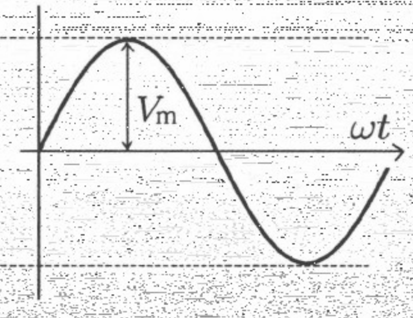
$\dot{V} = V_{\mathrm{m}}\,\varepsilon^{j\omega t}$ 的图像

在复数平面上就是大 V_{m} 的旋转矢量。



这个旋转矢量在虚轴（纵轴）上的投影是

$v = V_{\mathrm{m}} \sin \omega t$



啊，如上所示，用图像来表示就简单易懂多了。
可是，是怎么活用欧拉公式之后才得到这个公式的呢？

啊哈哈！这个过程稍微有些复杂。
首先，这样……**只把“欧拉公式”的虚部拿出来。**

欧拉公式

$$\varepsilon^{j\theta} = \cos\theta + j\,\underline{\underline{\sin\theta}}$$

$$\text{把这个虚部拿出来就是}\ \underbrace{\mathrm{Im}(\varepsilon^{j\theta})}_{\text{是}\,\varepsilon^{j\theta}\,\text{的虚部的意思}} = \underline{\underline{\sin\theta}}$$

什么什么什么？这么做能行吗？
这不就像只把水果酥饼上的草莓扣下来一样嘛……

是的。根据不同的**计算目的**，做这样的事情也是能够被理解的。
在电气领域的计算中，就像这样“**取出实部**”或者“**取出虚部**”的事情是很常见的。
取出虚部的情况用 Im( ) 来表示，取出实部的情况用 Re( ) 来表示。
请注意，可不要把这个符号跟电流的最大值 I_m 混淆了哦。

接下来的计算过程如下所述。把取出来的部分代入交流电压的公式。
只要真正理解了**取出**这一思想就算基本过关了，计算本身并不复杂。

因为 $\mathrm{Im}(\varepsilon^{j\theta}) = \sin\theta$

所以 $\varepsilon^{j\theta} = \sin\theta$

$\varepsilon^{j\omega t} = \sin\omega t$ —①

代入交流电压的公式可得

$v = V_m \underline{\sin\omega t}$

此处代入①可得

$v = V_m \varepsilon^{j\omega t}$ （复数）

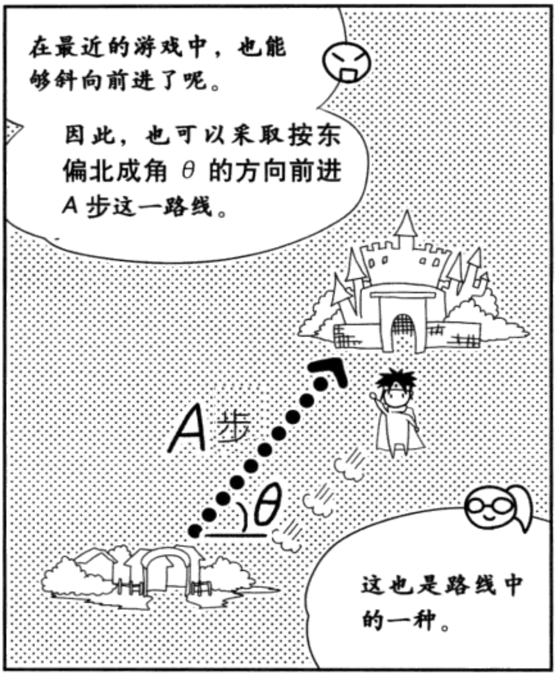
$\dot{V} = V_m \varepsilon^{j\omega t}$（复数矢量）

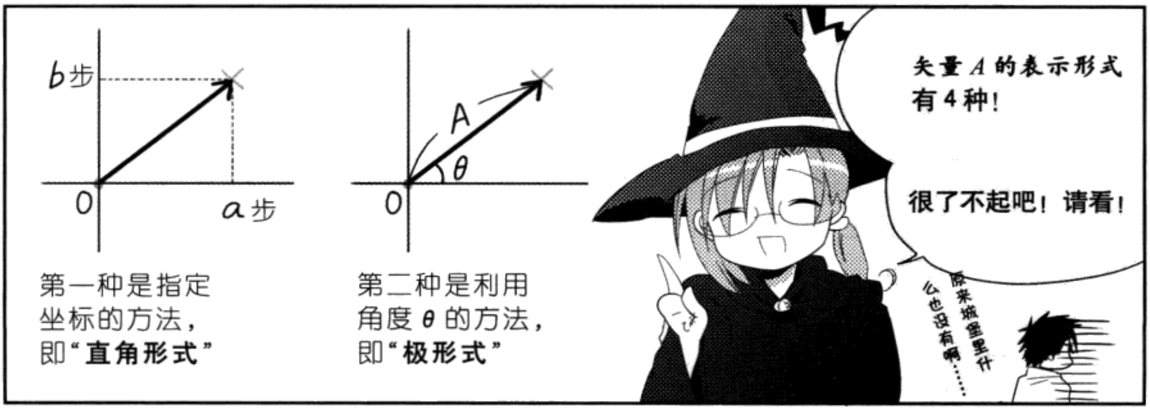
呃，我来总结一下，这次计算的目的就是换算交流电压的公式。
因为电压的值投影在虚轴（纵轴）上，所以把虚部取出来。
通过分析计算目的可知，**实部是不需要的多余部分**。所以这么做合情合理啊。

之所以能够做到这些，也**多亏了复数**啊，因为复数的**实数部分（实部）**和**虚数部分（虚部）**泾渭分明的缘故呢。

复数各种各样的矢量表示方法

※ 即角色扮演游戏，英文全称 role-playing game。——译者注





第一种是指定
坐标的方法，
即“**直角形式**”

第二种是利用
角度 θ 的方法，
即“**极形式**”

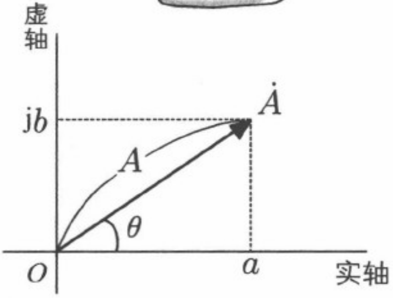
复数矢量的各种各样的表示方法

① 直角坐标表示法 …… **直角形式**

② 极坐标表示法

③ 三角函数表示法 …… **极形式**

④ 指数函数表示法



$A^2 = a^2 + b^2$， $A = \sqrt{a^2 + b^2}$ （复数 $\dot{A}$ 的绝对值 $|\dot{A}| = A$）

勾股定理

因为 $\dfrac{b}{A} = \sin\theta$ 所以 $b = A\sin\theta$， 因为 $\dfrac{a}{A} = \cos\theta$ 所以 $a = A\cos\theta$

→ 据此③中的公式成立

① **直角坐标表示法**：$\dot{A} = a + \mathrm{j}b$

② **极坐标表示法**：$\dot{A} = A\angle\theta$， $A = \sqrt{a^2 + b^2}$

③ **三角函数表示法**：$\dot{A} = a + \mathrm{j}b = A(\cos\theta + \mathrm{j}\sin\theta)$

$$\dot{A} = A(\cos\theta + \mathrm{j}\sin\theta)$$ → 矢量图在下一页

④ **指数函数表示法**：$\dot{A} = A\varepsilon^{\mathrm{j}\omega t}$

$\varepsilon^{\mathrm{j}\theta} = (\cos\theta + \mathrm{j}\sin\theta)$ ……欧拉公式

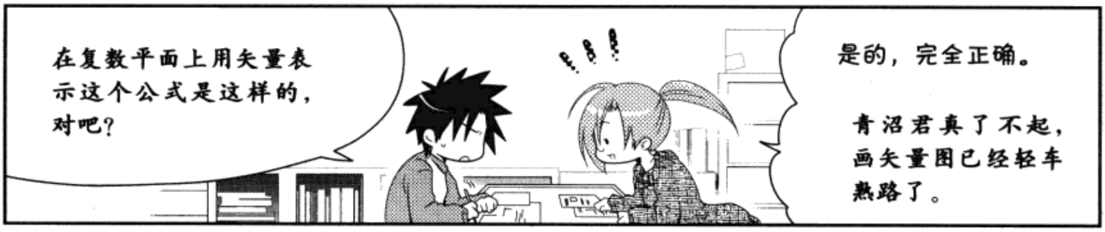
参考 电压的复数表示 $\dot{V} = V_{\mathrm{m}}\varepsilon^{\mathrm{j}\omega t}$

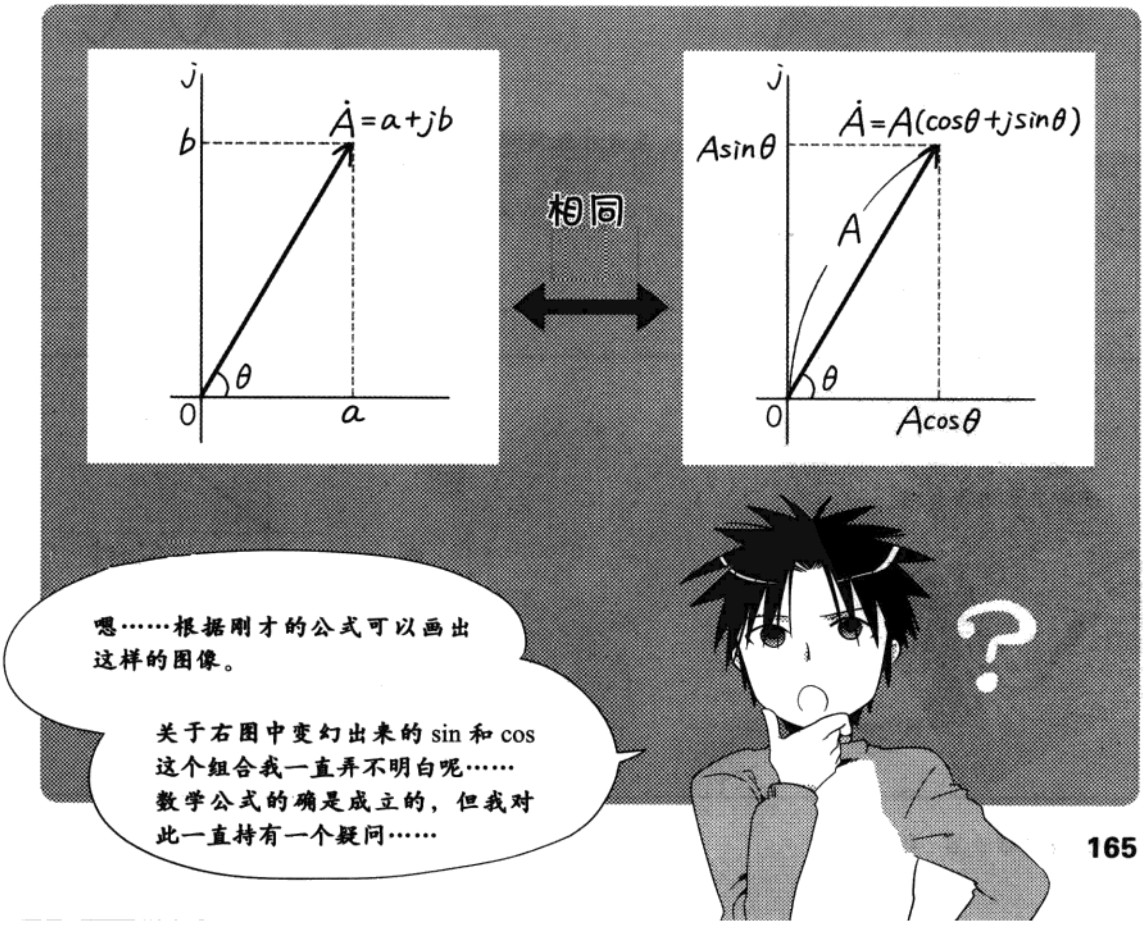
$$\dot{A} = A\varepsilon^{\mathrm{j}\theta} = A(\cos\theta + \mathrm{j}\sin\theta) = A\angle\theta = a + \mathrm{j}b$$

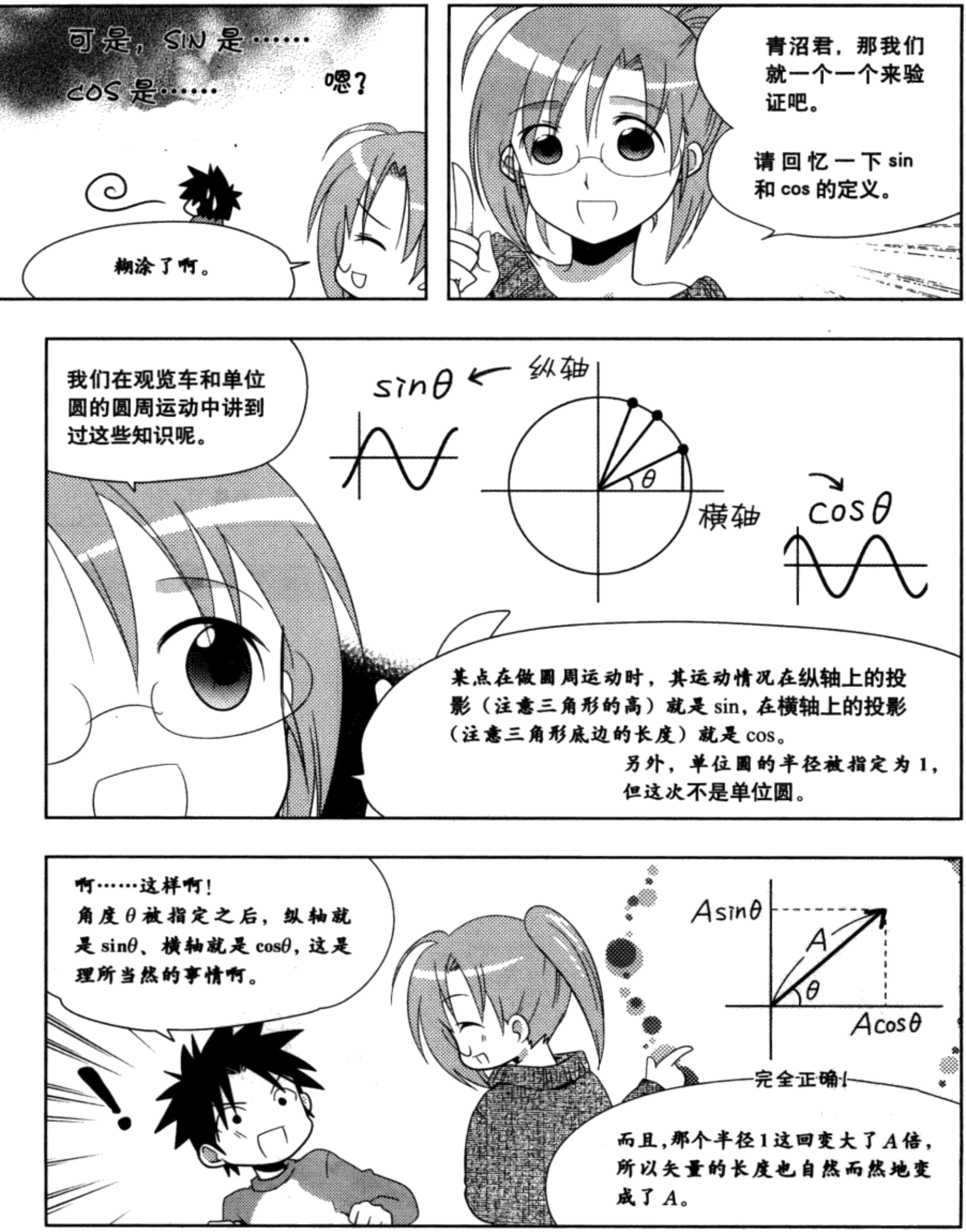
顺便说明一点，$A\varepsilon^{\mathrm{j}\theta} = A\varepsilon^{\mathrm{j}\omega t} = A\exp(\mathrm{j}\omega t)$

矢量表示法的补充知识


对、对不起啊，
不是习惯不习惯
的问题，
关于这个公式，以前我
就一直有一个地方弄不
明白。
$\dot{A} = a + jb = A(\cos\theta + j\sin\theta)$
是这个公式吗?


在复数平面上用矢量表
示这个公式是这样的，
对吧?
是的，完全正确。
青沼君真了不起，
画矢量图已经轻车
熟路了。


j
b
$\dot{A}=a+jb$
θ
0
a
相同
j
Asinθ
$\dot{A}=A(\cos\theta+j\sin\theta)$
A
θ
0
Acosθ
?
嗯……根据刚才的公式可以画出
这样的图像。
关于右图中变幻出来的 sin 和 cos
这个组合我一直弄不明白呢……
数学公式的确是成立的，但我对
此一直持有一个疑问……

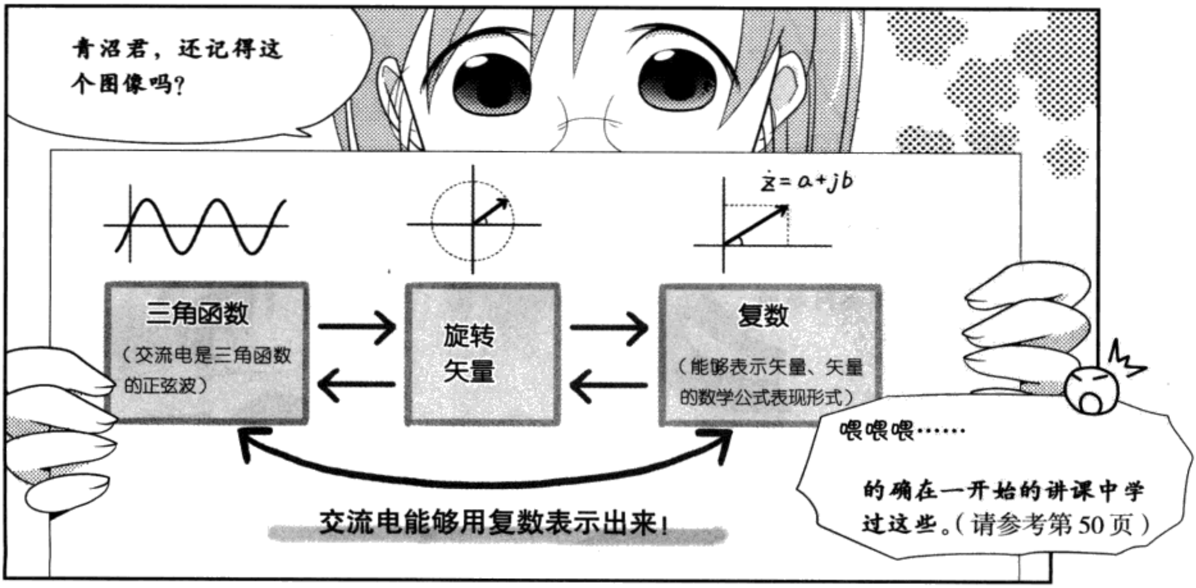

可是，SIN是……
cos是……
嗯？
糊涂了啊。
青沼君，那我们就一个一个来验证吧。
请回忆一下sin和cos的定义。
我们在观览车和单位圆的圆周运动中讲到过这些知识呢。
sinθ
纵轴
θ
横轴
cosθ
某点在做圆周运动时，其运动情况在纵轴上的投影（注意三角形的高）就是sin，在横轴上的投影（注意三角形底边的长度）就是cos。
另外，单位圆的半径被指定为1，但这次不是单位圆。
啊……这样啊！
角度θ被指定之后，纵轴就是sinθ、横轴就是cosθ，这是理所当然的事情啊。
!
Asinθ
A
θ
Acosθ
完全正确！
而且，那个半径1这回变大了A倍，所以矢量的长度也自然而然地变成了A。

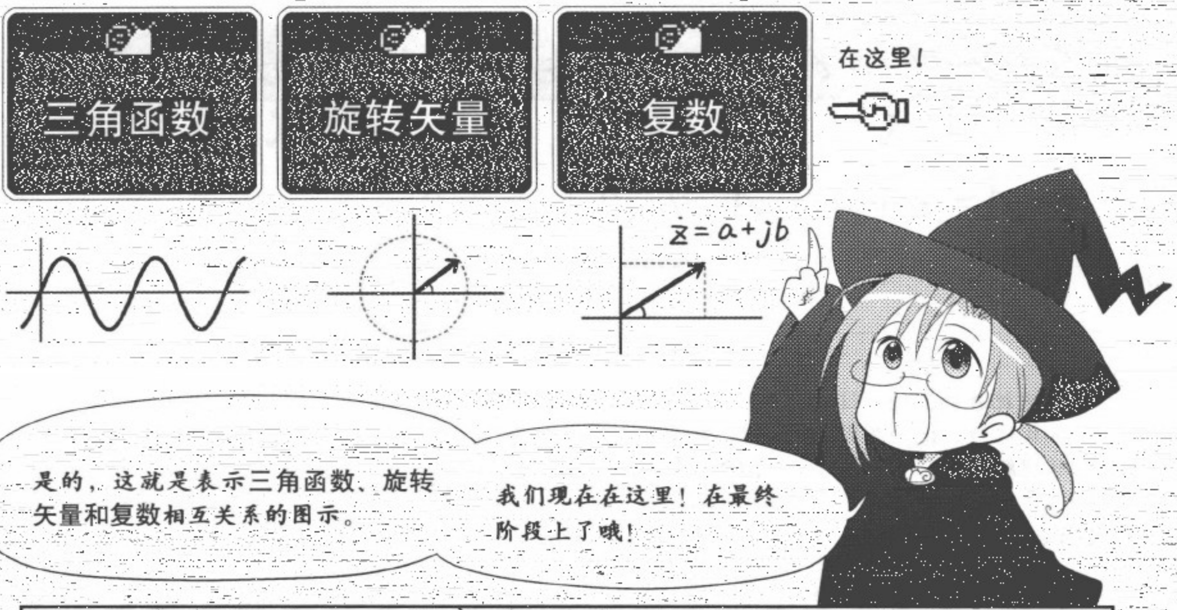
$$\dot{A}=\underbrace{A\varepsilon^{j\theta}}_{④式}=\underbrace{A(\cos\theta+j\sin\theta)}_{③式}=\underbrace{A\angle\theta}_{②式}=\underbrace{a+jb}_{①式}$$

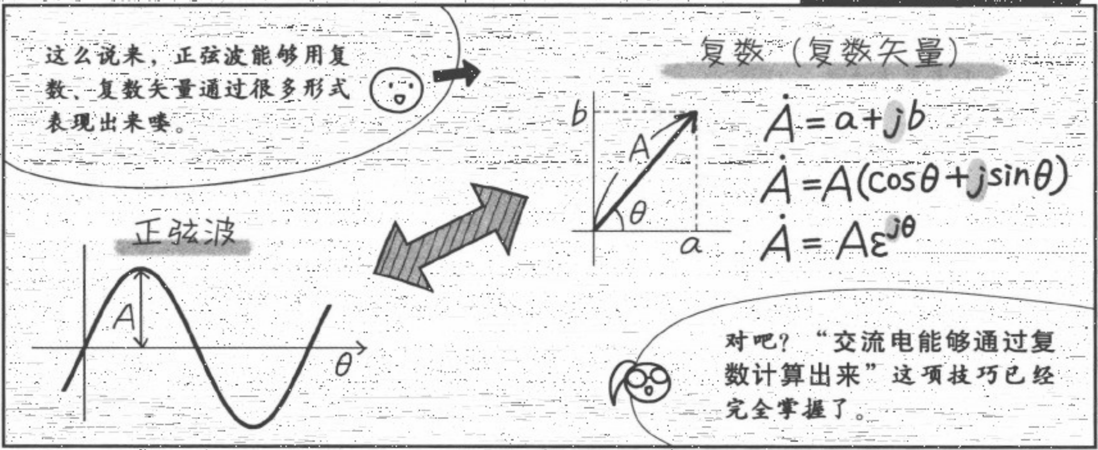
- $\dot{A}=a+jb=A(\underline{\cos\theta+j\sin\theta})$

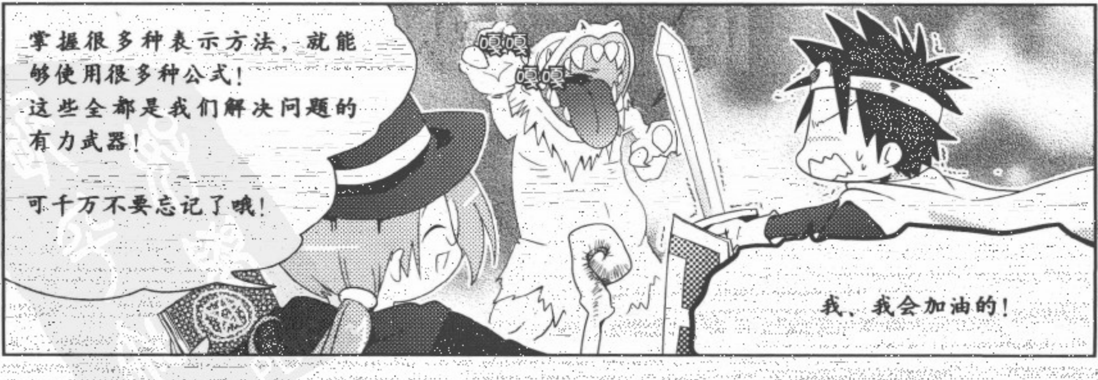
- $\boxed{\varepsilon^{j\theta}=\cos\theta+j\sin\theta}$

代入欧拉公式可得④式！




三角函数
旋转矢量
复数
在这里！
$\dot{z}=a+jb$
是的，这就是表示三角函数、旋转矢量和复数相互关系的图示。
我们现在在这里！在最终阶段上了哦！


这么说来，正弦波能够用复数、复数矢量通过很多形式表现出来喽。
复数（复数矢量）
b
A
θ
a
$\dot{A}=a+jb$
$\dot{A}=A(\cos\theta+j\sin\theta)$
$\dot{A}=A\varepsilon^{j\theta}$
正弦波
A
θ
对吧？“交流电能够通过复数计算出来”这项技巧已经完全掌握了。


掌握很多种表示方法，就能够使用很多种公式！这些全都是我们解决问题的有力武器！
可千万不要忘记了哦！
嗅嗅
嗅嗅
我、我会加油的！

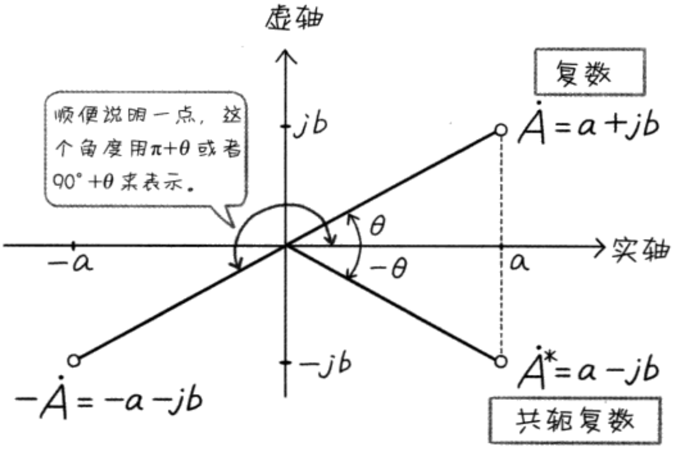
复数的计算方法

那么，在这里继续讲一下我们最好的伙伴——**复数的计算方法**。
“1. 共轭复数”、“2. 复数的幅角”、“3. 复数的模（绝对值）”、“4. 复数的加减乘除”，关于这些知识大家可一定要掌握哦。

1 共轭复数

若复数 $\dot{A}=a+jb$，那么他的共轭复数是 $\dot{A}^{*}=a-jb$.

请看下面的矢量图。由此可见，复数和共轭复数是一**对**。
两者的矢量图关于实轴对称。

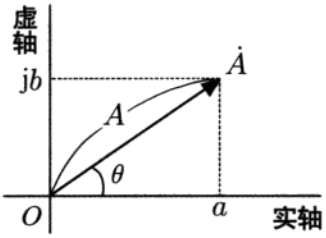


哦。两者的确是一对呢。就像正和负、白天和黑夜的关系那样。
换个通俗易懂的说法，就像主人公和竞争对手之间的关系那样……对吧？

可以这么说。实际上，在计算过程中经常会用到共轭复数。
主人公和竞争对手联合行动才计算出了结果！这么想还真不错呢！

$$\underset{\dot{A}}{\underline{(a\oplus jb)}}\underset{\text{联合行动}}{}\underset{\dot{A}^{*}}{\underline{(a\ominus jb)}} = (a\times a)-\underset{\text{换算成}-1}{j^{2}}(b\times b)$$
$$= a^{2}+b^{2}$$

接下来请观察右边的矢量图，同时来分析
“2. 复数的幅角”和
“3. 复数的模（绝对值）”
这两个知识点。



2 复数的幅角

若复数为 $\dot{A} = a + jb$，那么幅角（或称相位角）θ 的计算公式如下：

$$\theta = \underset{\uparrow}{\arg}\,\dot{A} = \tan^{-1}\frac{b}{a}\quad\left(\text{因为 }\tan\theta = \frac{b}{a}\text{ 所以 }\theta = \tan^{\underset{\uparrow}{-1}}\frac{b}{a}\right)$$

表示幅角的用语
读作“阿哥”

负次数
（详细内容请参考第 100 页）

所谓 arg，就是幅角“argument”的缩略语。

3 复数的模（绝对值）

若复数为 $\dot{A} = a + jb$，那么模（**绝对值**）则是

$$|\dot{A}| = \underbrace{\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(a + jb)(a - jb)} = \sqrt{\dot{A}\dot{A}^*}}_{\text{请参考共轭复数的计算方法}}$$

嗯嗯嗯。共轭复数这家伙还真在很多地方都起着重要作用呢。

知识点！

“绝对值”和“模”虽然相似，但严格意义上的定义并不相同。

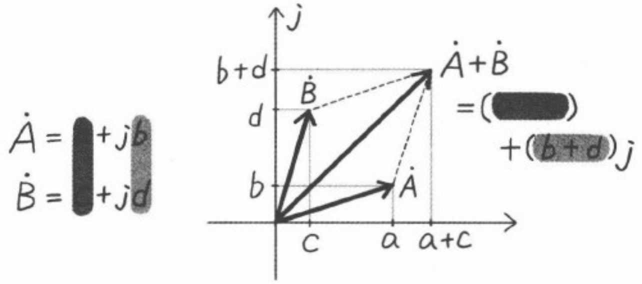
“绝对值”的适用范围**仅限于数字**，如复数和实数等。
我们在求取矢量大小的过程中，同时需要求出这个数字的绝对值。

“模”不仅适用于数字，还适用于空间中的函数。
与矢量不同，不仅有大小这样的模，还有最大值等各种各样的模。
总之，与绝对值相比，**模的适用范围更广**。

所谓加减乘除，是“**加法**”、“**减法**”、“**乘法**”、“**除法**”的意思。

4 复数的加减乘除

$$\dot{A}+\dot{B}=a+\mathrm{j}b+c+\mathrm{j}d=a+c+\mathrm{j}(b+d)$$



$$\dot{A}-\dot{B}=a+\mathrm{j}b-(c+\mathrm{j}d)=a-c+\mathrm{j}(b-d)$$

$$\begin{aligned}\dot{A}\times\dot{B} &= (a+\mathrm{j}b)\times(c+\mathrm{j}d)\\ &= ac+\mathrm{j}ad+\mathrm{j}bc+\overset{-1}{\mathrm{j}^2}bd\\ &= (ac-bd)+\mathrm{j}(ad+bc)\end{aligned}$$

把算式中的 **j²** 换算成 −1

$$\begin{aligned}\frac{\dot{A}}{\dot{B}} &= \frac{a+\mathrm{j}b}{c+\mathrm{j}d}=\frac{(a\oplus\mathrm{j}b)\underline{(c\ominus\mathrm{j}d)}}{(c\oplus\mathrm{j}d)\underline{(c\ominus\mathrm{j}d)}}\\ &= \frac{(ac+bd)+\mathrm{j}(bc-ad)}{c^2+d^2}\end{aligned}$$

使用共轭复数

哦哦。**实数跟实数**进行计算，**虚数跟虚数**进行计算啊。

说的没错！在跟复数打交道时，一定要时常意识到**实部**和**虚部**的区别。
复数的计算结果自然也是个复数呢。

答案 = 实部 + 虚部

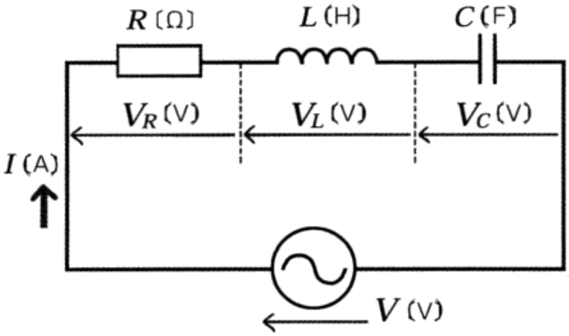
$\dot{Z} = A + \mathrm{j}B$

把 j 放在前面，马上就能知道这是虚部

掌握了这些计算方法后，接下来就要多做练习题呢。

3 应用复数的问题

问题 一起来学习复数的作用吧



请求出如上图所示 RLC 串联电路中的阻抗，并用矢量图表示电压和电流的关系。另外，设定交流电相关的角频率为 $\omega = 2\pi f$。

解析 ★这个问题共有两个解题方法。关于另外一种解题方法请参考第 175 页。

马上就来了关于**交流电源**的问题呢！
在交流电源的问题中，分析“**相位**”非常重要。
相位能够用复数来表示。
另外，因为这是**串联**电路，所以**电流 I 是定值。**
而且，如果记不住我们之前所讲过的内容，也没法解答这个问题。

啊。之前你可教了我很多很多知识呢。
电阻 R、线圈 L、电容器 C 等，以及它们各自的特征什么的（请参考第 118 页）。

非常正确！如果记不住这些内容，就不可能正确解答这个问题。
矢量图的画法基本跟以前所讲的一模一样（请参考第 128 页）。
这次我们来画画**复数矢量**看看吧。

A. 解答

首先确定三个元件相对应的电压 $\dot{V}$。

因为电流 $\dot{I}$ 是定值，所以适用于欧姆定律

$$\dot{V}_R = \dot{I}R \text{、} \dot{V}_L = \mathrm{j}\omega L\dot{I} \text{、} \dot{V}_C = -\mathrm{j}\frac{\dot{I}}{\omega C}$$

※ 表示相位的 j 和 −j

如果记不住**电容器和线圈**的电抗这个

知识点，就没法列出上面这些算式。

因为 $\dot{V} = \dot{V}_R + \dot{V}_L + \dot{V}_C$

所以阻抗 Z 的计算公式为

$$\dot{Z} = \frac{\dot{V}_R + \dot{V}_L + \dot{V}_C}{\dot{I}}$$

欧姆定律

（电阻就是阻抗 Z）

$$= \frac{\dot{I}R + \mathrm{j}\omega L\dot{I} - \mathrm{j}\dfrac{\dot{I}}{\omega C}}{\dot{I}}$$

$$= R + \mathrm{j}\omega L - \mathrm{j}\left(\frac{1}{\omega C}\right)$$

$$= R + \mathrm{j}\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

因为是 $a + \mathrm{j}b$ 的形式了，所以计算到此就结束了。

到此为止，我们已经成功解答了第一个问题：**请求出阻抗的值**。

将在下一页中继续解答第二个问题：**请画出电流和电压关系的矢量图**。

接下来我们分析电压 $\dot{V}$ 和电流 $\dot{I}$ 的关系。

- 因为与电阻 R 相关的电压 $\dot{V}_R$ 和电流 $\dot{I}$ 的关系是

$$\dot{V}_R = \dot{I}R$$

所以电压和电流同相（相位角相同）。

- 因为与线圈 L 相关的电压 $\dot{V}_L$ 和电流 $\dot{I}$ 的关系是

$$\dot{V}_L = \underline{\mathrm{j}}\omega L\dot{I}$$

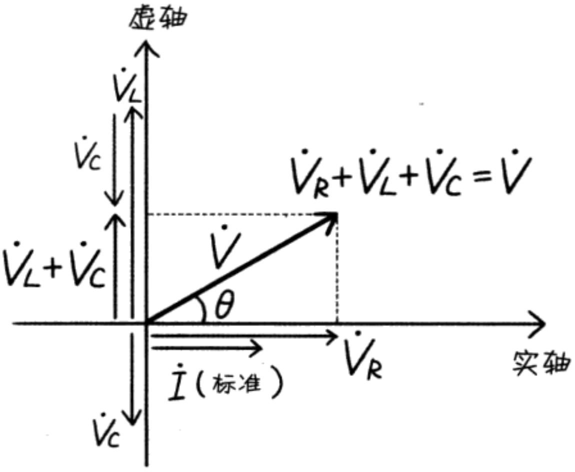
所以电压 $\dot{V}_L$ 比电流 $\dot{I}$ 领先 π / 2（90°）相位。

- 因为与电容器 C 相关的电压 $\dot{V}_C$ 和电流 $\dot{I}$ 的关系是

$$\dot{V}_C = \underline{-\mathrm{j}}\frac{\dot{I}}{\omega C}$$

所以电压 $\dot{V}_C$ 比电流 $\dot{I}$ 落后 π / 2（90°）相位。

我们将这些关系用图表示则如下图所示。



简化微积分方程式

嗯嗯。问题解答得非常好！

但是，这个问题**还有一个解答方法**。

实际上，电源电压 v 和电路中的电流 i 之间的关系可以用如下**微积分方程式**来表示。

$$v = Ri + L\underbrace{\frac{di}{dt}}_{\text{用时间}t\text{来}\textbf{微分}i} + \frac{1}{C}\underbrace{\int i\,dt}_{\text{用时间}t\text{来}\textbf{积分}i}$$

运用这个公式能够解答问题哦。

哇塞！哎呀哎呀哎呀，这个我可不行！我最、最不擅长微积分了！

话说回来，在一开始讲课的时候，您不是说过**“只要有复数，就不用考虑微积分”**嘛？为什么现在突然又说不得不考虑微积分呢？

啊，看来真的很不擅长微积分呢。

现在开始要讲述的这个解题方法，就算是不擅长微积分的青沼君，我也要极力向你推荐！

那就是**“利用复数简化微积分方程式”**的方法。

就算是复杂难懂的微积分方程式，如果能够简化成简单的公式，那么使用起来不就非常简单易懂了嘛。

是啊。可是简化……真的能简化吗？

是的。如果把**微积分方程式**看做用**复数表示的公式** $\dot{V} = V_{\mathrm{m}}\varepsilon^{j\omega t}$ ，那么可以将其简化成如下所示公式。

※ 前提是电路处于**定常状态**（电流和电压的变化情况一定）。

$$v = Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int idt$$

$$\Downarrow$$

$$\dot{V} = \left(R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}\right)\dot{I}$$

这个？从这里开始的话就简单多了呢。
接下来好像应该这样来解答。

阻抗 *Z*

$$\begin{aligned}\dot{Z} &= \frac{\dot{V}}{\dot{I}} \leftarrow \text{欧姆定律（电阻就是阻抗 } Z\text{）} \\ &= R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \\ &= \underline{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}\end{aligned}$$

因为是 ***a*+j*b*** 的形式了，所以计算到此就结束了。

完全正确！简化之后就很简单了吧。

是的。
可是，为什么能够简化微积分方程式呢？

哈哈。实际上，这次我们能够进行如下改写。

$$d/dt \ \text{（微分）} \Downarrow j\omega \qquad \Big| \qquad \int dt \ \text{（积分）} \Downarrow 1/j\omega$$

哦哦，通过 jω 来改写微积分啊！
太厉害了！ j 这个孩子和欧米伽猫先生！

的确非常便利哈。但是，有一点请大家注意，进行这一简化必须满足以下两个条件：

- **微积分的对象是 $A\varepsilon^{j\omega t}$ 的形式**
- **用时间（t）来进行微积分的时候**

关于为什么能够进行这样的简化，下面会通过详细的公式换算过程来进行说明。在解答问题的时候，省略这一详细的换算过程也没关系。

为什么能够进行简化（微分）

$$\dot{V} = V_m \varepsilon^{j\omega t}$$

微分

$$\frac{dV}{dt} = V_m \cdot j\omega\varepsilon^{j\omega t}$$

根据奈培数 e 的特性可知：

$$\varepsilon^{j\omega t} \ \xrightarrow{\text{（微分）}} \ j\omega\varepsilon^{j\omega t}$$

$$\frac{dV}{dt} = j\omega \underbrace{V_m\varepsilon^{j\omega t}}_{\text{等于}\ \dot{V}}$$

$$\frac{dV}{dt} = j\omega\dot{V}$$

为什么能够进行简化（积分）

$$\dot{V} = V_m \varepsilon^{j\omega t}$$

积分

$$\int V dt = \frac{V_m\varepsilon^{j\omega t}}{j\omega}$$

根据奈培数 e 的特性可知：

$$\varepsilon^{j\omega t} \ \xrightarrow{\text{（积分）}} \ -j\omega\varepsilon^{j\omega t}$$

$$\frac{1}{j\omega}\varepsilon^{j\omega t}$$

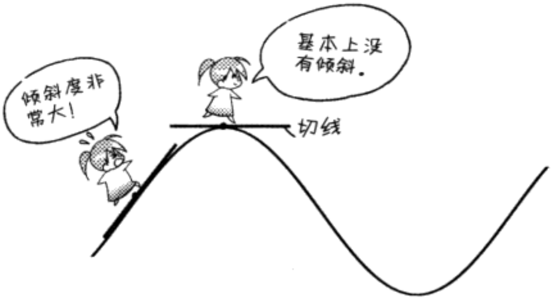
$$\int V dt = \frac{\dot{V}}{j\omega}$$

从什么时候开始学习微分和积分了啊

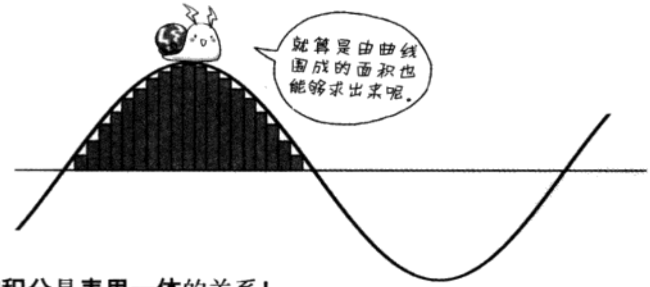
就算如此，刚才微分和积分只稍微露了一次脸，就把我头疼坏了啊。
关于微积分，我在高中时代就只知其然不知其所以然，头疼得要命。唉……

你的心情我能理解。
但是，微分和积分的确是**分析变化情况的根基**所在。
它们与曲线和波形都有着很深的渊源。接下来我简单地介绍一下与其相关的皮毛知识。

- **微分**就是细分后进行分析的意思。通过切线的倾斜度来判断变化的程度。



- **积分**就是把分开的东西积聚起来的意思。用来分析面积和体积等。

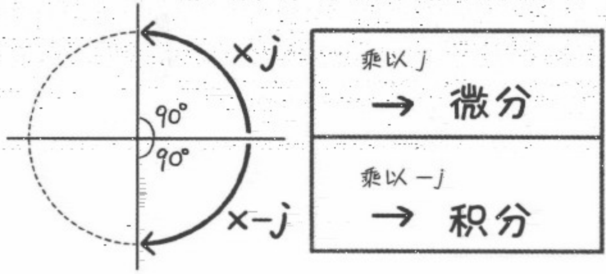


- **微分和积分**是**表里一体**的关系！

$$\begin{tikzcd} \boxed{e^{j\omega t}} \arrow[r, bend left, "\text{积分}", "\times -j\omega\left(=\frac{1}{j\omega}\right)"'] & \boxed{e^{j\omega t}} \arrow[l, bend left, "\text{微分}", "\times j\omega"'] \end{tikzcd}$$

曲线、波形、变化的情况……啊，看来微积分对于电气数学的学习也的确非常重要呢。可是，我真的学不好啊，呜呜……

没关系的啦。青沼君虽然根本没有意识到，但实际上你一直都在不断地亲近微积分呢。我们在分析**相位**的时候，引进了 j 这个概念，实际上……



乘以 j =相位前进 90° ，跟**微分**的意义相同。
乘以 –j =相位后退 90° ，跟**积分**的意义相同。

哎！多亏了复数的缘故，原来我已经在不知不觉中接近微分和积分了呢。

另外，就像刚才所讲过的公式那样，两者之间能够进行互换，具体如下所示。

d/dt（微分）
⬇
$j\omega$

$\int dt$（积分）
⬇
$1/j\omega\ (= -j/\omega)$

$$\frac{1\times j}{j\omega\times j}=\frac{j}{j^2\omega}=-j/\omega$$

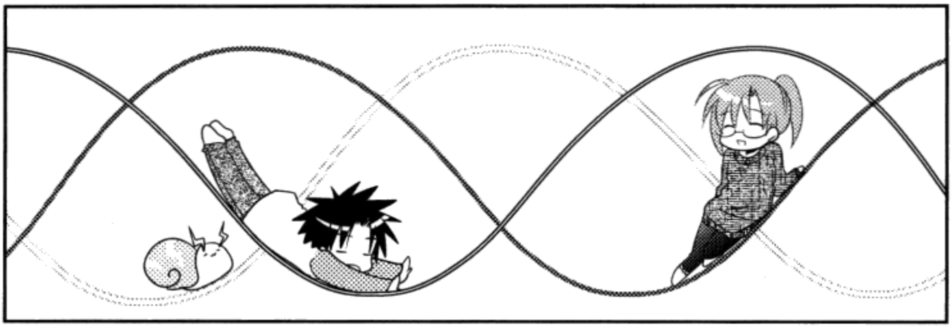
在这种情况下，我们不仅分析了相位，还分析了大小这个因素，所以公式中还出现了 ω。
意思是说，“微分不仅产生了 90° 的旋转，还使振幅变为原来的 ω 倍”。

哦。不管怎样，分析相位的话就只使用 j 和 –j 就行。
如果是整个公式，那么借助 $j\omega$ 和 $-j/\omega$ ($=1/j\omega$)，就能够**简化微分和积分**，对吧。这还真实用呢！

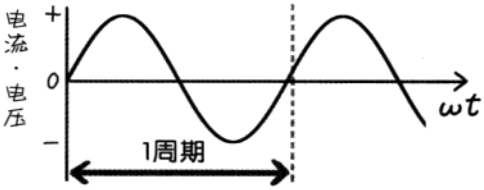
4 三相交流电路

来看看电线吧

单相交流电和三相交流电



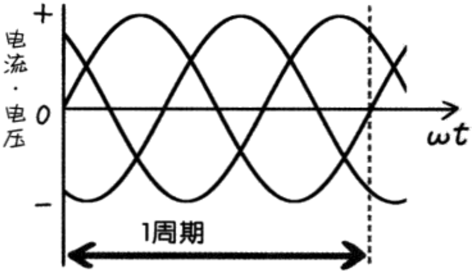
首先我们来介绍“**单相交流电**”和“**三相交流电**”。
一般家庭里所使用的插座都是“**单相交流电**”，电压和电流的波形重叠，只有一个。



单相交流电的波形

嗯嗯，这是我们一直都在学习的内容呢。

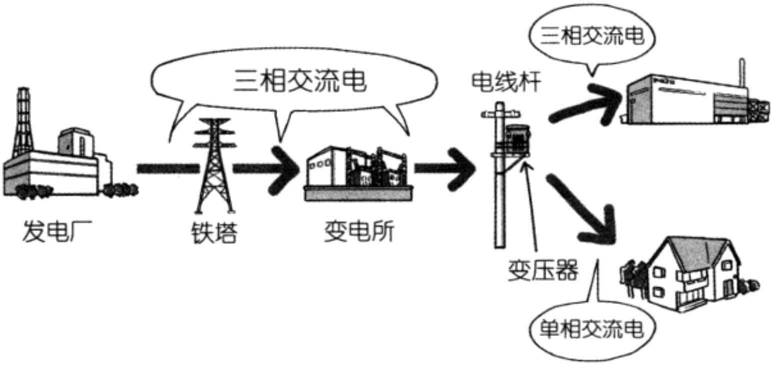
然而，公司和工厂中的工业用电源、电线杆上的电线等都是“**三相交流电**”。



三相交流电的波形

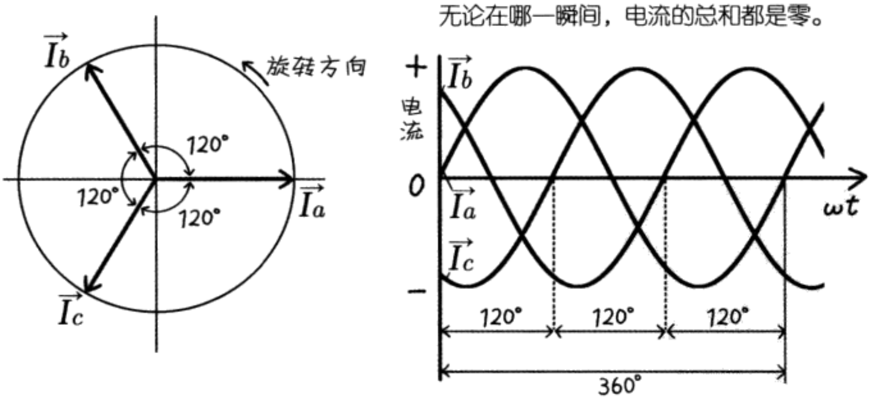
喂喂喂喂喂！波形有三个呢！

三相交流电在电功率供给方面效率非常高。
就算是输送到家庭中的电功率，在输送途中也一直都是**三相交流电**。
通过电线杆上的**变压器**后才被转换成**单相交流电**呢。



啊！电线杆的上端的确有东西呢。那就是变压器啊。

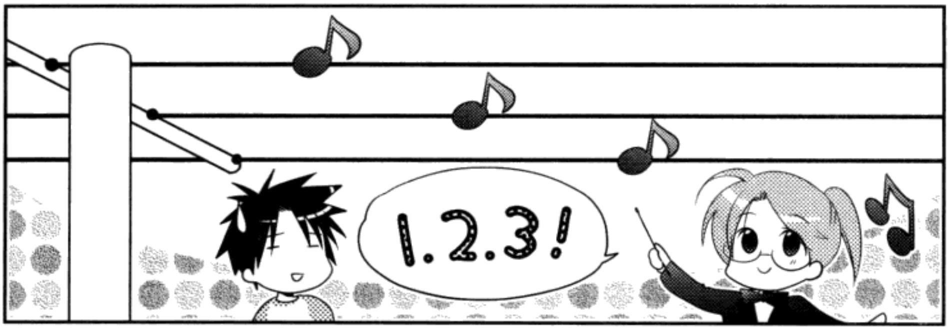
另外，就像单相交流电能够用旋转矢量来表示一样，**三相交流电也能够通过三个旋转矢量表示出来。**
用 $\vec{I_a}$、$\vec{I_b}$、$\vec{I_c}$ 分别表示电流的三个矢量，将其用图形表示则如下图所示！



表示三相交流电的三个旋转矢量

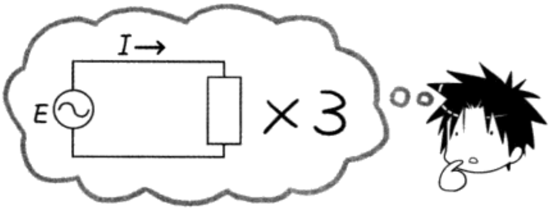
嗯，嗯。每个电流同伴之间的**相位都是 120°** 呢。

三相交流电的电路图

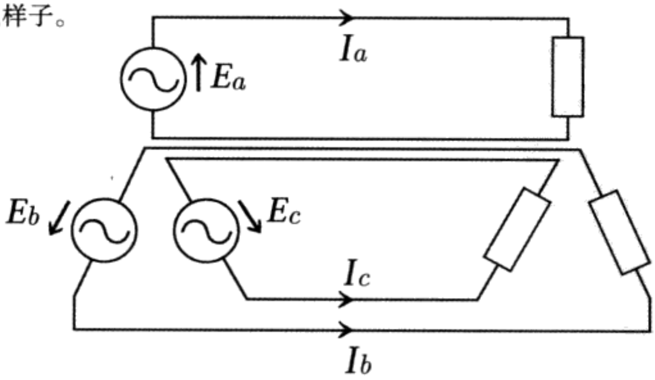


接下来我们分析三相交流电的**电路图**！
能想象出来这是怎样一个电路图吗？

嗯。单相交流电的电路图是这样的，它的 3 倍应该是……



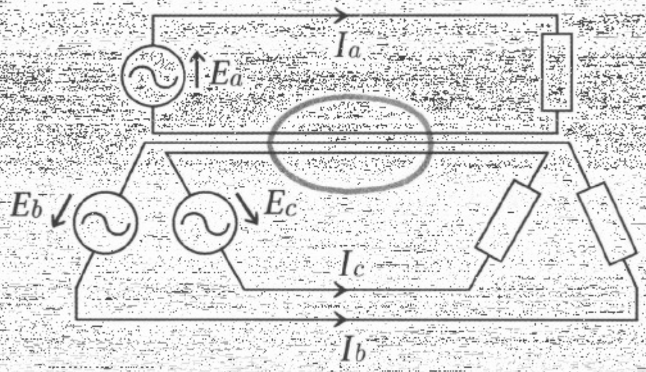
基本分析方法就是这样的。
接下来我们一起来把 3 个单相交流电的电路图组合在一起，看看实际上到底是什么样子。



啊，这个图形太有意思了！有很多电线连在一起呢。

是不少哈。实际上，有些电线是**能够省略不画**的。

首先，用圆圈圈出来的这三根电线能够用一根电线代替。



I_a、I_b、I_c 这三个电流大小相等，但因为相互之间存在相位，相互错开，所以共用一根电线也不会有任何问题。

嗯，嗯，嗯。

这样一来，如下图所示，电线一共只需要 4 根就可以了。

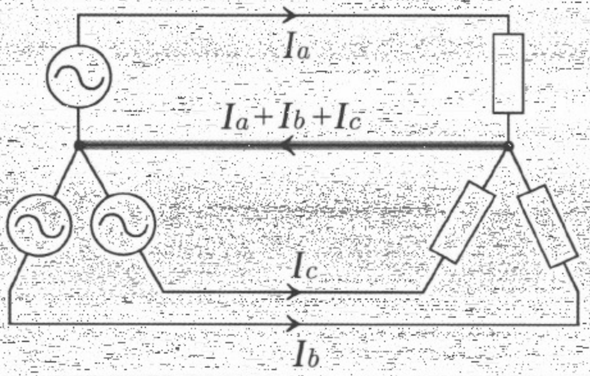


图 a 共用一根电线的情况

没错！不仅如此，接下来还能进行省略。

实际上，这根共用的电线也能够省略不画。

啊？还能省略吗？

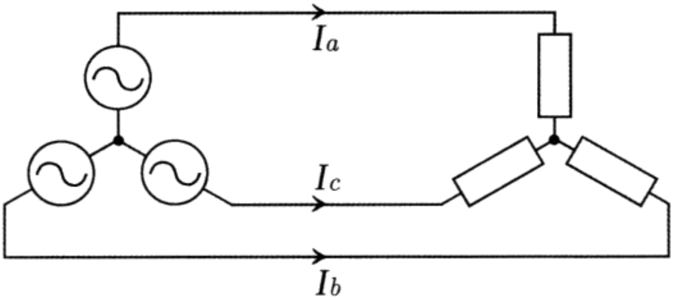


图 b 三相交流电的电路图

看，完成啦！这就是**三相交流电的电路图。**

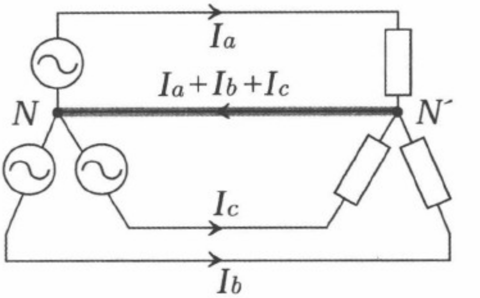
啊，电线杆上还真的只有 3 根电线呢。但是，省略这么多能行吗？
这么小气，节约过度的话，会不会产生故障呢……

没问题的啦。从电气数学的角度来看，根本不会出现任何故障。
实际上，刚才的“**图 a 共用一根电线的情况**”中的电线 $I_a+I_b+I_c$ 中流动的**电流为零**。

哎！这一部分中没有电流流过吗？
所以说，连接上电线也是浪费，省略掉也没有问题啊。
可是，当中的电流真的是零吗？太不可思议了……

嗯嗯，真的很不可思议。电流是零这一点能够通过计算进行证明。
接下来我们就把它当做一个问题来解答看看吧！

问题　来证明电流等于零吧



在如上图所示的三相交流电路图中，请证明 N 和 N' 之间流动的电流等于零。

问题解析

三相交流电路的相位分别都是 120°（请参考第 182 页）。
用**弧度法**表示 120°，然后利用**指数函数**可以把这三个电流分别表示如下。

利用指数函数表示法

$$\dot{A} = A\varepsilon^{j\theta}$$

可得

$$\begin{aligned}\dot{I}_a &= |I| \\ \dot{I}_b &= |I|\varepsilon^{j\frac{2}{3}\pi} \\ \dot{I}_c &= |I|\varepsilon^{j\frac{4}{3}\pi}\end{aligned}$$

120°

再 120°

另外，在这个问题中，**欧拉公式**非常重要。
在实际计算过程中，请参考下面这个表格。

θ	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
弧度 rad	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{21}{12}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$	2π
$\sin\theta$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos\theta$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

A. 解答

$$\begin{aligned}
\underset{(NN'\text{ 之间的电流})}{I_{NN'}} &= I_a + I_b + I_c \\
&= |I| + |I|\varepsilon^{j\frac{2}{3}\pi} + |I|\varepsilon^{j\frac{4}{3}\pi} \\
&= |I|\{1 + \underline{\varepsilon^{j\frac{2}{3}\pi}} + \underline{\varepsilon^{j\frac{4}{3}\pi}}\}
\end{aligned}$$

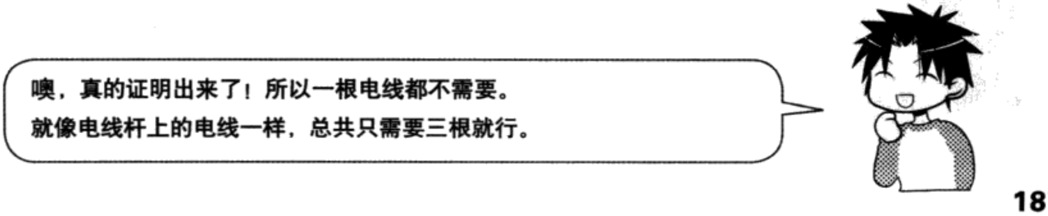
分析这一部分

根据欧拉公式

$\varepsilon^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$ 可得

$$\begin{aligned}
\underline{\varepsilon^{j\frac{2}{3}\pi}} &= \cos\overset{120^\circ}{\boxed{\frac{2}{3}\pi}} + j\sin\overset{120^\circ}{\boxed{\frac{2}{3}\pi}} \\
&= -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \\
\underline{\varepsilon^{j\frac{4}{3}\pi}} &= \cos\overset{240^\circ}{\boxed{\frac{4}{3}\pi}} + j\sin\overset{240^\circ}{\boxed{\frac{4}{3}\pi}} \\
&= -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}$$

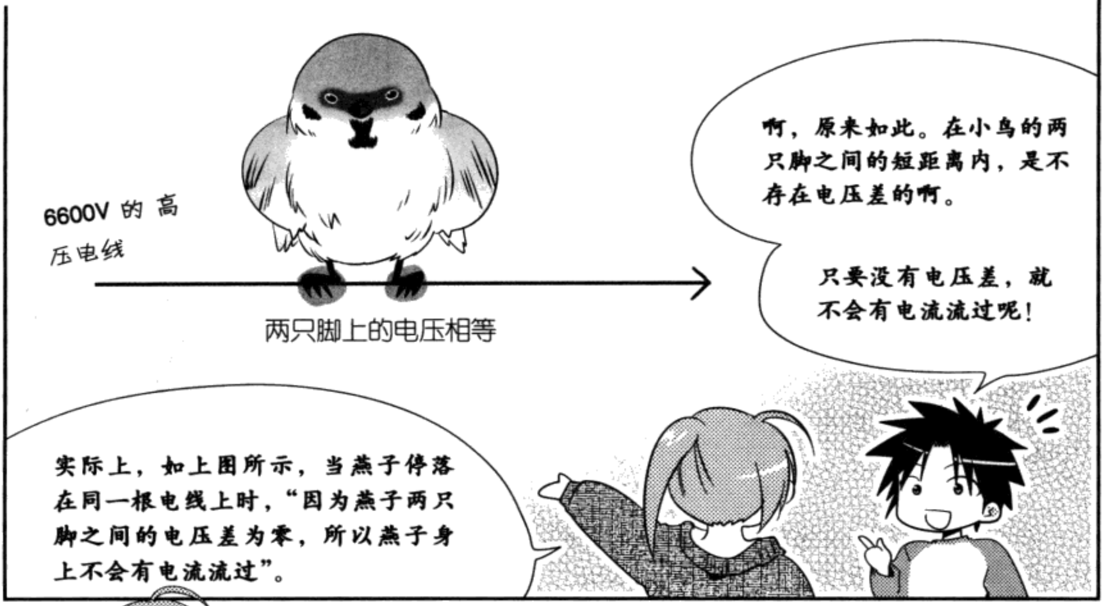
$$\begin{aligned}
&= |I|\left\{1 + \left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\} \\
&= 0
\end{aligned}$$



燕子为什么不会触电

※ 在交流电中，超过 600V 的电压被称作高压。


功率　电压×电流
P = EI
滴流
滴流
滴流
滴流
电流在电线里流动时，会产生像漩涡一样的电流，被称作“涡电流”。
因为涡电流会转换成热量成为功率的损耗，所以，为了减小涡电流，就需要减小电流，增大电压。
虽然那些电线外面穿着一层外衣，但我还是觉得直接接触一定会触电。
6600V 啊，触电的话……
糟糟糟糟了！会跟燕子一起触电的！
快逃！
没关系的啦。燕子们不是活得好好的嘛，还在叽叽喳喳地叫呢。
不过，请注意观察燕子的脚部！
脚部……
嗯？
叽叽
喳喳
这么说来，所有的燕子都站在同一根电线上呢。
没有一只燕子横跨两根电线？
非常正确，青沼君！

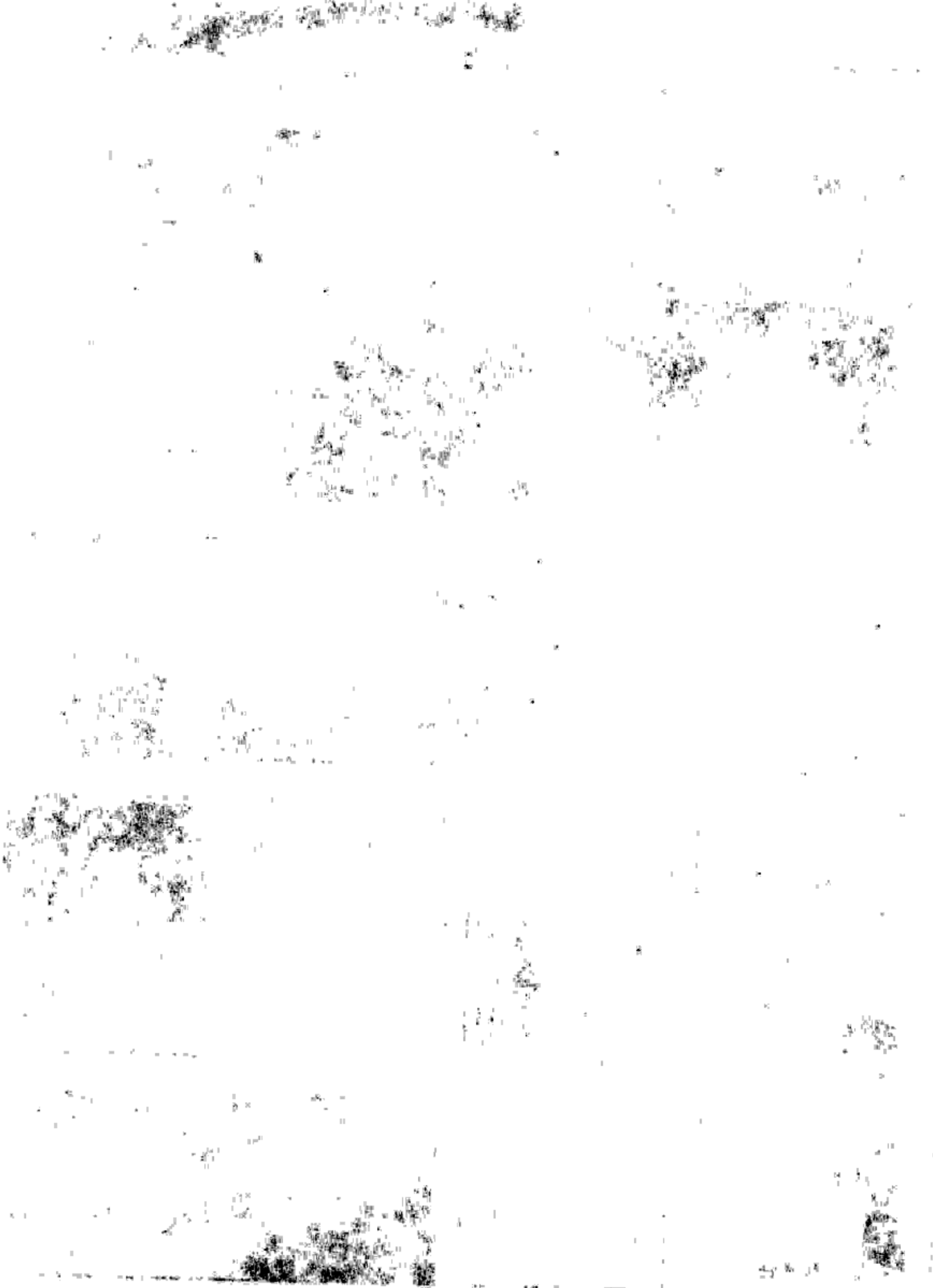


※ 当电压差和电阻非常非常微小时，可以视其为零。

※ 所谓绝缘电线，指的是把电流流经的金属部分用绝缘体（电流难以流通的物质）包裹起来的电线。


今天你又辛苦。
下次上课要等到明年了呢。
……啊，嗯，您也辛苦了。
怎么了？
是不是有什么不明白的地方？
今天的确是讲了太多内容。
不是……
我、我不是这个意思……
……
我、我还不知道小橘的全名呢。
突然想起来，所以……


哇
我都说了些什么啊！
虽然的确是那么想的，但怎么一下子就说出口了呢！
对、对、对不起对不起！我是开玩笑的，开玩笑的！
慌慌
张张
只是那么想了想，没有什么别的意思……
……是吗？
那……明年再在上次那个公园里见。
新年快乐！
是！
新年快乐！
嗨……
突然之间，让人家觉得我这人很嬉皮笑脸吧……
我还是第一次见小橘这么消沉呢……
啊……啊……
真后悔就这么说出口了……



第 5 章

用方程式和不等式解答电路问题

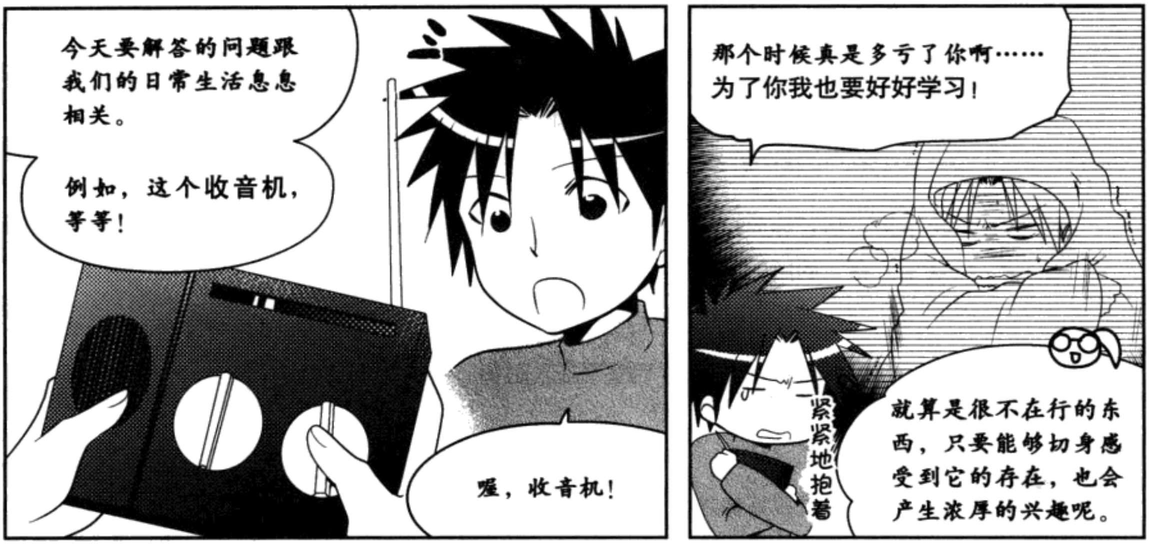
（第二部分 交流电路）

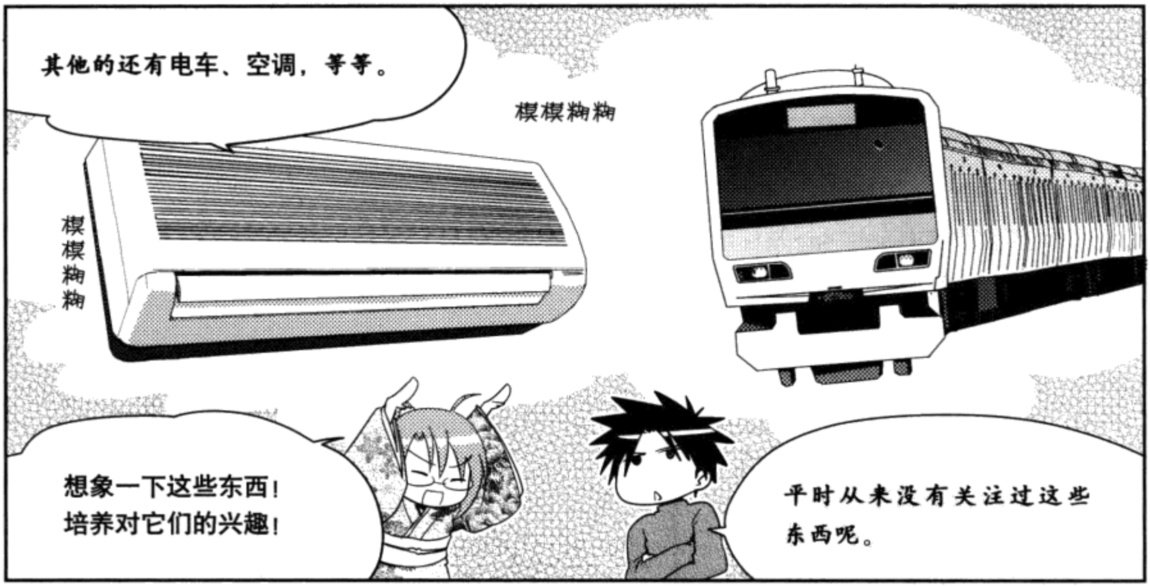

——1月3日
电力博物馆
嗯嗯，
一眨眼的功夫，新的一年就开始了啊……
哆哆嗦嗦
虽然跟小橘约好了，但不知道她会不会来呢。
年末分别的时候，气氛那么怪异……
人家好心好意地帮我……就算被拒绝了我也无话可说呢。
如果不来的话，我就放弃算了……
啊……
青沼君！
！！

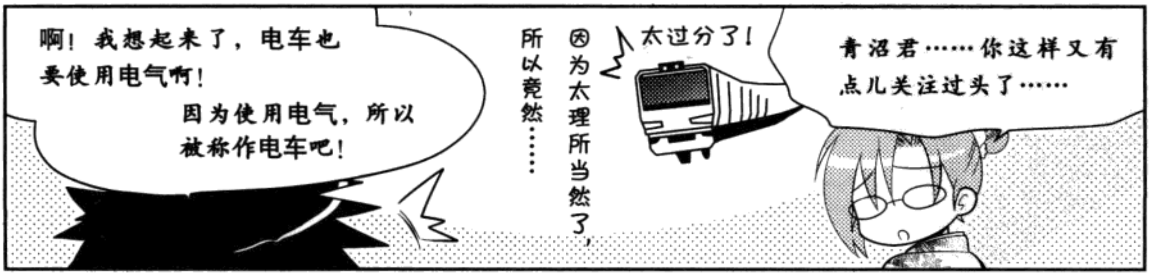

这个……那个……
新、新年快乐！
我、我跟妈妈说要出门，结果妈妈非得让我穿上和服！所以……
是、是不是觉得我很自我陶醉啊，对不起啊！
看傻眼了
所、所以，那个……好不容易穿了这么一身衣服，再在公园里学习有点让人很难为情，所以……
今天还想再去你家里学习，可以吗？
青沼君？
啊
啊，当然可以。
哈哈……
还是那个小橘呢。
太好了！
而且，真可爱啊！
有请有请！
尽管来就是了！
我们出发吧！
真的给你添麻烦了！

1 二次方程式和二次不等式的解法

二次方程式和二次不等式


今天要解答的问题跟我们的日常生活息息相关。
例如，这个收音机，等等！
喔，收音机！
那个时候真是多亏了你啊……为了你我也要好好学习！
紧紧地抱着
就算是很不在行的东西，只要能够切身感受到它的存在，也会产生浓厚的兴趣呢。


其他的还有电车、空调，等等。
模模糊糊
模模糊糊
想象一下这些东西！培养对它们的兴趣！
平时从来没有关注过这些东西呢。


啊！我想起来了，电车也要使用电气啊！
因为使用电气，所以被称作电车吧！
因为太理所当然了，所以竟然……
太过分了！
青沼君……你这样又有点儿关注过头了……

解的公式

接下来，请首先回忆一下二次方程式的解法。
这个方程式的**解的公式**如下所示。

$$ax^2+bx+c=0 \xrightarrow{\text{解的公式是}} x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

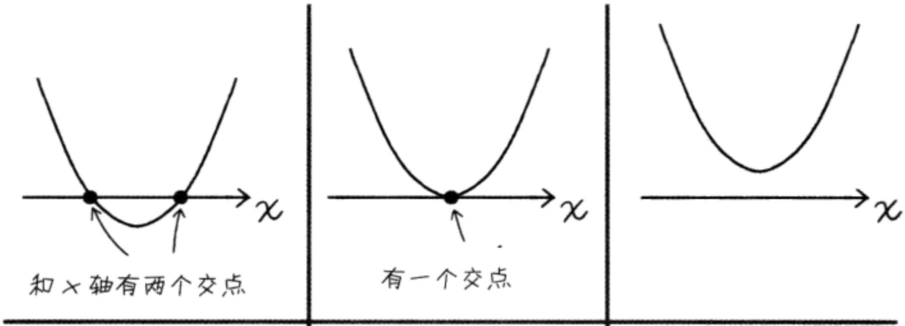
啊，这个公式我好像还背诵过……

这里最重要的部分在根号里面！

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

← 判别式 D

其中 b^2-4ac 被称作**判别式** D。
根据判别式的值能够判断二次方程式的解的个数。
二次方程式和解的个数的关系如下图所示。



D > 0	D = 0	D < 0
有两个实数解	有一个重解 (实数解)	没有实数解。 有两个虚数解。

原来如此。当 $b^2-4ac<0$ 时，也就是**根号下的部分是负数**的时候，方程式的**解是虚数**。
而且，因为解的公式中有正和负之分，所以有两个解。

说的很对！归根结底，为了想办法解答 D < 0 时的二次方程式才产生了虚数（请参考第 154 页）。
另外，当 D < 0 时，二次方程式的复数解的算式如下所示。

$$x=\frac{-b\pm j\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\underbrace{-\frac{b}{2a}}_{\text{实部}}\pm\underbrace{j\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}_{\text{虚部}}$$

哎！解的公式也能把实部和虚部分开进行分析啊。

那么，接下来我们一起来求取一般的二次方程式的解吧。
然后我们接着讲解**因数分解**的知识。

！数学例题

请求出 $x^2+3x+2=0$ 的解。

【解法】

因为这个方程式的左边能够进行因数分解，所以通过因数分解的方法求解。把方程式进行因数分解可得 $(x+2)(x+1)=0$

所以，这个方程式只要满足 $x+2=0$ 或者 $x+1=0$ 就可以。

所以求得方程式的两个解分别是 $x=-2$ 和 $x=-1$。

另外，对于那些难以进行因数分解的二次方程式 $ax^2+bx+c=0$，只要根据其解的公式

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

耐心地进行计算就可以了。

整式的因数分解

因数分解……这个词儿听着就让人觉得很不舒服呐！

哎呀哎呀，首先我们来复习“**因数分解**”的意义。

$$\underset{\text{因数}}{\underbrace{(x-2)}\,\underbrace{(x-3)}} \underset{\text{因数分解}}{\overset{\text{展开}}{\rightleftarrows}} x^2-5x+6$$

所谓**因数分解**，就是用两个以上的整式的乘积表示一个整式。
另外，组成乘积的每一个整式被称作**因数**。

哦，就像其名称所包含的意思一样，是分解成因数的感觉呢。
只要记住“跟公式的**展开**正好相反”，便能稍微松口气了呢。

说的没错。以下这些公式非常重要。
一定要认真观察，抓住其中的内涵。

因数分解公式

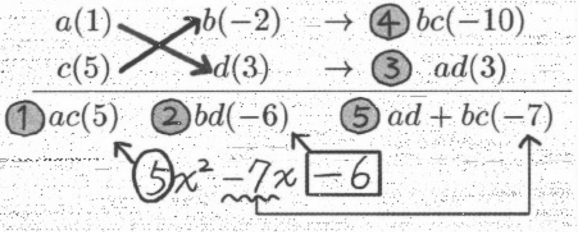
1. $ma + mb = m(a + b)$ …… 共同因数能够提前
2. $x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b)$ …… 和是（$a + b$）、积是 ab 的形式
3. $x^2 + 2ax + a^2 = (x + a)^2$ …… 上面公式中 $a = b$ 的情况
4. $x^2 - 2ax + a^2 = (x - a)^2$ …… a 是负数的情况
5. $x^2 - a^2 = (x + a)(x - a)$ …… 平方差公式
6. $acx^2 + (ad + bc)x + bd = (ax + b)(cx + d)$ …… 一般的因数分解
7. $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
8. $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

接下来我们就应用刚才的“公式 6”来进行一般的因数分解。

数学例题

请对整式 $5x^2-7x-6$ 进行因数分解。

【解析和答案】根据公式 6 可得 $ac=5$，$ad+bc=-7$，$bd=-6$，只要分别求出 a，b，c，d 的值就可以了。



计算的具体过程

① 分析 $ac=5$ 中的 a 和 c

② 分析 $bd=-6$ 中的 b 和 d

③ 利用背带相乘法求出 ad 的值

④ 通过背带相乘法求出 bc 的值

⑤ 只要 $ad+bc$ 等于 -7 就是正确答案

如上所述，只要 $a=1$，$b=-2$，$c=5$，$d=3$ 就符合上述条件。

$$所以\ 5x^2-7x-6=(x-2)(5x+3)$$

嗯，关于因数分解我已经弄明白了。但是，因数分解的作用到底是什么呢……

对哈，这还是个问题呢。举个简单的例子进行说明。
比较突然啊，青沼君，**请心算** 61×59 等于多少。快！

唉！这根本就不可能算出来啊！

嘿嘿。实际上，使用刚才的“公式 5”
$x^2-a^2=(x+a)(x-a)$ 一下子就能算出来。
$61\times59=(60+1)(60-1)=60\times60-1\times1=3600-1=3599$
这样一来，心算就能算出结果来了，既简单又方便呢。

喔，真是这么回事儿呢。心理有点后悔，没好好学习……

知道了因数分解的方法，就能够从很多方面理解整式。
改变了观察数字的角度，处理整式的时候也会变得顺手多了。

联立不等式的解法

那么，请首先回忆一下联立不等式的解法。
同时满足每一个不等式的答案的**范围**就是联立不等式的解。
如果这个范围为空，那么联立不等式无解。

数学例题

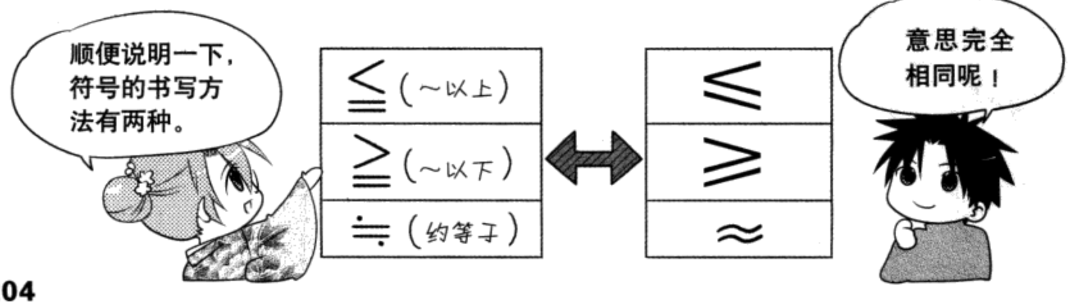
求解 $\begin{cases} 3x-2>4 \\ x+2\leqslant 7 \end{cases}$

【解析和答案】上面的不等式 $3x-2>4$ 可以变形为 $3x>6$，两边同时除以 3 可得 $x>2$。
下面的不等式 $x+2\leqslant 7$ 的解是 $x\leqslant 5$。
因此，取同时满足两个不等式的解的范围可得 $2<x\leqslant 5$，这就是联立不等式的解。

啊，“同时满足两个条件的范围”在日常生活中也经常用到呢。
例如，我去租房子，我能支付的月房租在 5 万日元以下。
而向外出租的房屋中，只要是月房租超过 2 万日元的，什么价位的房子都有。
因此，我能租到的房子应该是“月租超过 2 万日元，小于 5 万日元”的房屋。

嗯嗯。就是这个意思。在这种情况下，如果只有月租超过 6 万日元的房屋向外租赁，那么联立方程式无解——也就是说，没有符合条件的房子供你选择。

这、这个例子还真让人喘不上气来呢。

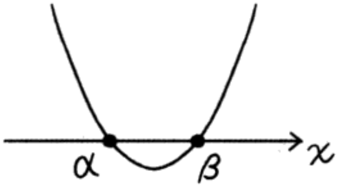


二次不等式的解法

接下来我们继续讲二次不等式的解法
为了求解二次不等式，首先需要分析二次方程式。

$$ax^2 + bx + c = 0$$

接下来我们分析这个等式有两个实数解的情况。
假设方程式的两个实数解分别是 α 和 β。



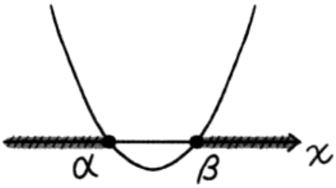
嗯嗯，那么 $\alpha < \beta$ 呢。

此时，二次不等式的解如下所示。

$$ax^2 + bx + c > 0$$

的解是

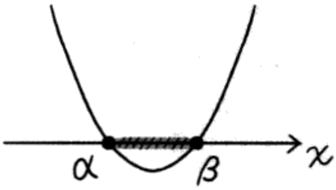
$x<\alpha，x>\beta$



$$ax^2 + bx + c < 0$$

的解是

$\alpha<x<\beta$

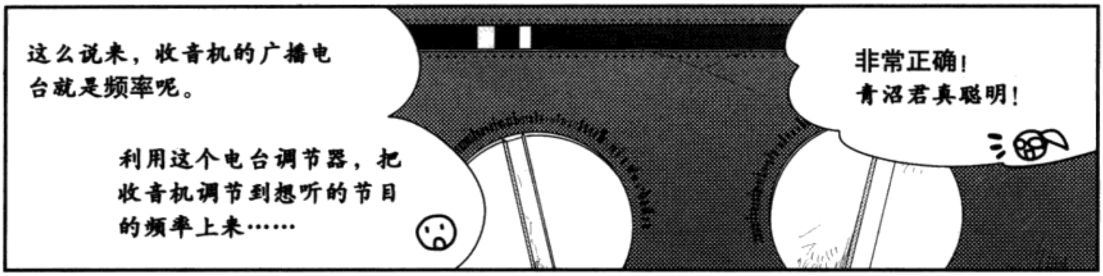


喔，不等式的符号方向不同，不等式的解就完全不同呢。

是的！因此，可一定要好好注意**不等号的方向**哦。

2 跟收音机相关的电气数学问题

什么是谐振



众所周知，收音机中有很多不同的广播电台，对吧？

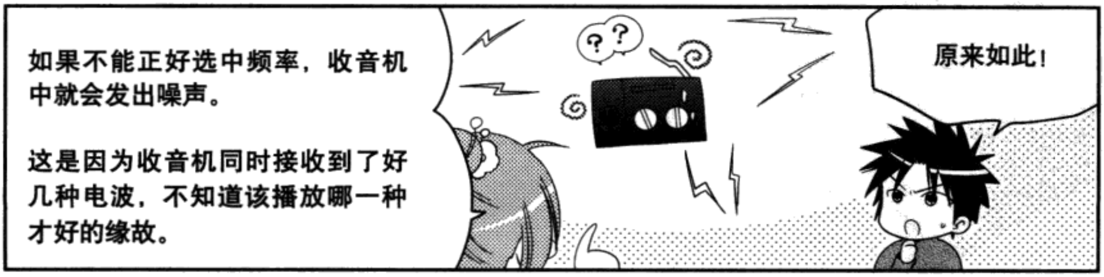
收音机是把声音信息转化成电波并进行播放的机器。

我们又通过收音机这个工具，把各个广播电台发出的电波信号接收下来。

收音机广播电台一览表

AM		FM	
TBC 广播电台	954kHz	东京 FM	80.0MHz
文化广播电台	1134kHz	J-WAVE	81.3MHz
日本广播电台	1242kHz	Inter FM	76.1MHz
NHK 第一频道	594kHz	NHKFM 东京	82.5MHz

※ 东京地区的 FM 调频




就像收音机这样，选择某一特定频率的电流被称作“谐振”。
这个谐振需要……
哇，又来了啊！
线圈和电容器！
为了选择广播电台而旋转电台调节器的时候，在收音机中起作用的就是线圈和电容器。
所谓谐振，是线圈和电容器共同作用而产生的现象。
咚！
咚！
是啊……在那个时候，
你们能来帮助我，真是太感谢了！
七…八……
呜呜……
？？
关于圣诞节前夜的回忆

谐振频率

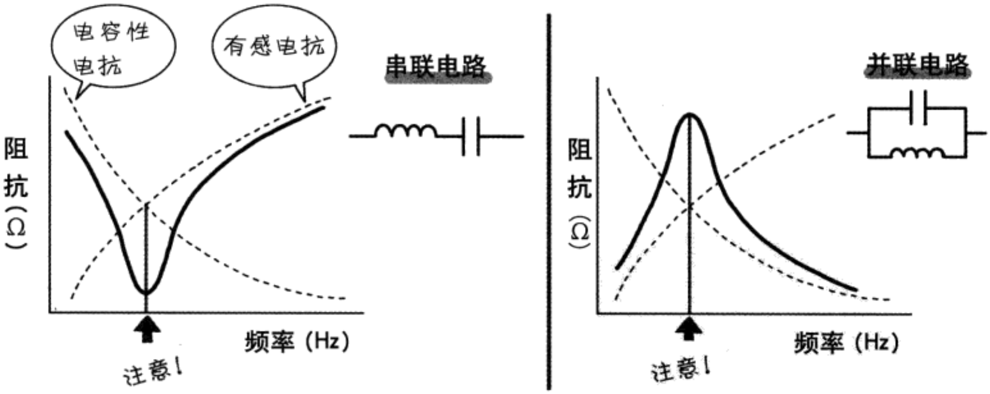
好了，接下来我们对“**谐振**”的结构进行详细说明。
首先，请回忆一下线圈和电容器的特性。

有感电抗（交流电路中线圈的电阻）跟频率**成正比**。
电容性电抗（交流电路中电容器的电阻）跟频率**成反比**
（请参考第 120 页）。

啊，你这么一说我也想起来了。反正是**性质完全相反**呢。

这一点非常重要！把性质完全相反的**线圈和电容器组合在一起**，便能够形成具有谐振功能的电路——**谐振电路**。

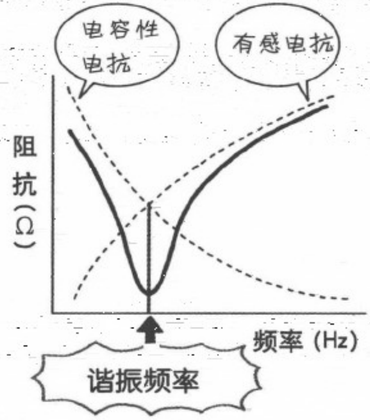
请看下图。
这是随着**频率**的变化而变化的**有感电抗和电容性电抗**的变化情况。
随着频率不断发生很小的变化，在某一特定的频率上，阻抗会发生巨大的变化。



线圈和电容器组合而成的谐振电路
（有感电抗和电容性电抗随着频率的变化而变化）

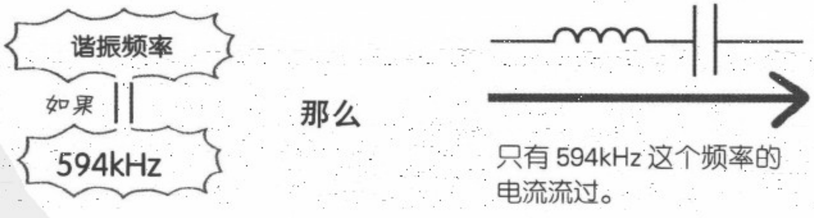
哦哦。在有感电抗和电容性电抗的曲线交叉的地方，**阻抗〔Ω〕的大小会发生急剧的变化啊。**

是的！这个发生巨大变化的部分被称作**谐振点**，此时的频率被称作**谐振频率**。
我们以**串联电路**为例进行说明。
也就是说，当阻抗的值最小时的频率就是**谐振频率**。



呃，这么说来，**谐振频率**时，这个串联电路的阻抗最小。
根据欧姆定律，可以说此时的**电流最大**呢。

完全正确！我们再来分析刚才谈到的收音机选台问题。
如果我们想收听某一个节目，如 NHK 东京第 1 广播电台 594kHz。
那么**只要把这个频率（594kHz）设置成谐振频率就可以了。**



电阻最小，电流最大，就得到了我们想要的频率。
同时，针对其他的频率，应该把它们的电阻变大，从而避免不想要的频率混淆其中。

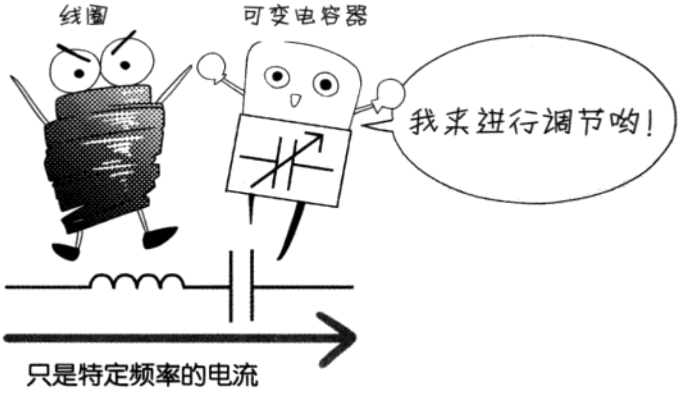
原来如此！这就是**选择特定电流的“谐振”**的效果。
为了这个共同的目标，线圈和电容器在协同工作呢。
这就是所谓的谐振电路哈。

……嗯？我还有个问题，怎样把特定的频率（如 594kHz）设置成**谐振频率**呢？

收音机里使用**可变电容器**来达到这个目的。
所谓可变电容器，就是电容量（＝静电容量、电气容量）**能够在一定范围内进行调节**的电容器。

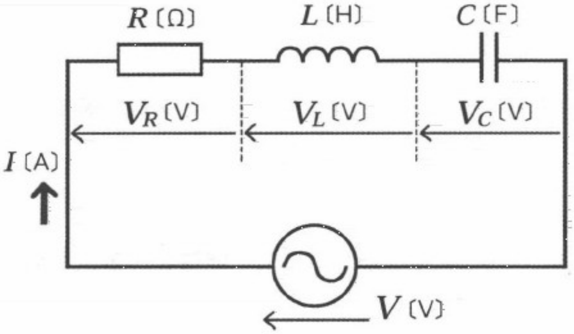
可变电容器的电气符号

啊，我好像明白了什么似的！
如果电容器的电容量发生了变化，电容性电抗就会发生变化，谐振频率也就随之发生变化。
通过**可变电容器**，能够“把特定的频率调节成谐振频率”呢。



嗯嗯。你好像已经完全掌握了谐振和谐振频率了呢。
那么，接下来我们就在此基础上，一起来做题吧。

问题 求取谐振频率



请求出 RLC 串联电路中的谐振频率 f 啊。设定角频率为 $\omega=2\pi f$。

问题解析

噢……
要求出谐振频率 f 啊，到底该怎么办呢……

首先，请回忆一下**谐振频率的定义。**
在串联电路中，阻抗最小时的频率就是**谐振频率**，对吧。

也就是说，只要分析阻抗的大小，确定什么情况下阻抗的值最小就可以了。

原来如此。关于 *RLC* 串联电路中的阻抗 *Z*，以前我们就求过它的值呢！（请参考第 173 页）

是的。因为阻抗的计算公式中有 ω，所以最终能够通过**角频率** $\boldsymbol{\omega=2\pi f}$ 求出 $\boldsymbol{f}$ 的值。

A. 答案

因为这个电路中的阻抗 $\dot{Z}$ 的计算公式是

$$\dot{Z} \;=\; R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

所以阻抗的大小 $|Z|$ 的计算公式是

$$|Z| = \sqrt{R^2 + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

因为谐振频率 f 是这个 $|Z|$ 最小时的频率，所以只要求出算式

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0$$

← 这样的话，√‾ 中算式的值最小！

成立时的角频率 ω，再换算成频率就可以了。

要点！因为最终要求的是 f，所以作为铺垫，首先关注 ω。

因为这个方程式可以变形为 $\omega^2 LC - 1 = 0$（等式两边同时乘以 ωC）

$$\omega^2 = \frac{1}{LC}$$

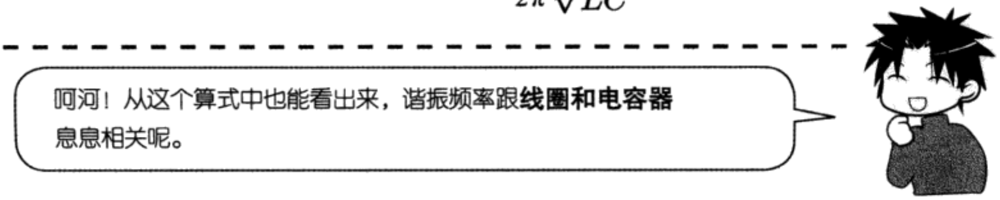
所以

$$\omega = \pm\frac{1}{\sqrt{LC}}$$

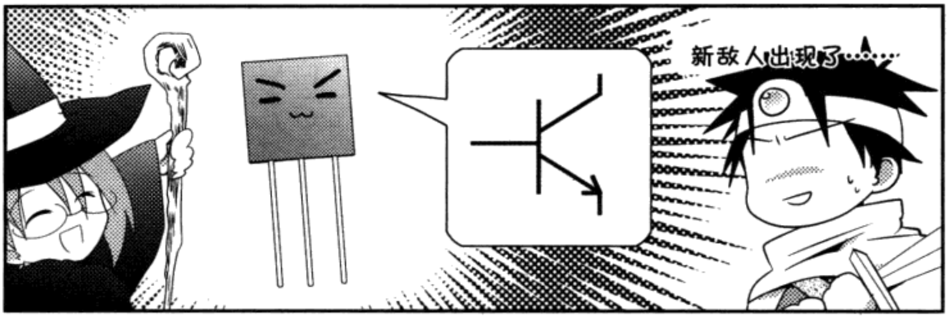
物理学上不考虑负的频率和角频率。

所以 $$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

又因为 $\omega = 2\pi f$，所以 $$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad \text{〔Hz〕}$$



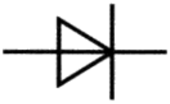
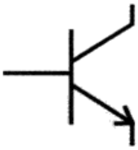
放大和晶体管



那么，接下来我们继续聊收音机的话题。
实际上，在收音机里，产生谐振的同时，还会产生“**放大**”。
就是把谐振产生的特定频率的电子信号**变得更大**。
放大过程中会用到被称作**晶体管**的部件，电路也因此变成了**电子电路**。

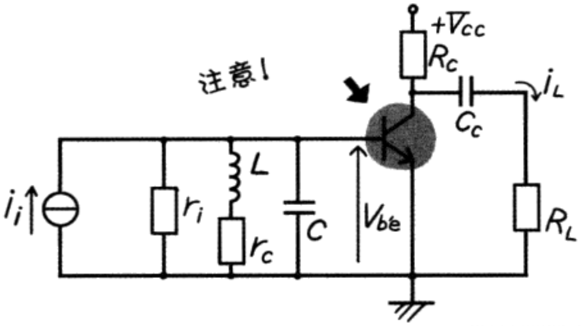
嗯？晶体管？电子电路？跟以前我们一直在讲的电气电路不一样吗？

是的。从现在开始讲的不是电气电路，而是稍微复杂些的**电子电路**。
在电子电路中，除了 *RLC* 之外，还包括**二极管**和**晶体管**等**半导体元件**。

二极管	晶体管
	
三角形指向的方向是电流流动的唯一方向。相反的方向上没有电流流过。这就是二极管的性质。	晶体管所起的作用，包括放大作用，以及控制电流流动等类似开关的作用。

哦。感觉很像高科技啊。电流的流动好像也很困难呢。

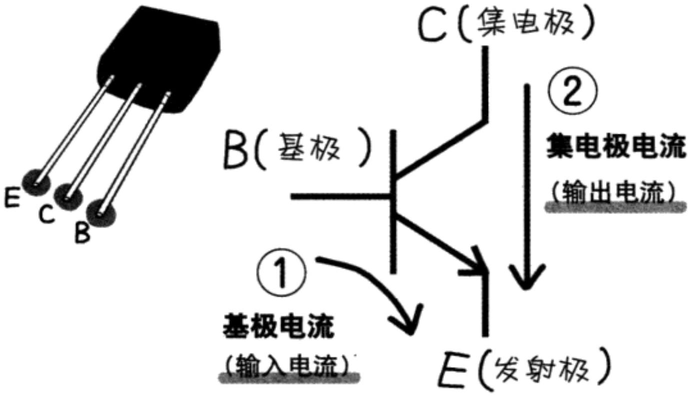
哎呀，请不要把它想得太复杂，其实很简单的。
虽然进展速度有点快，但接下来我们直接讲**谐振放大电路**。有请！



谐振放大电路

哇哇哇，这也太难了！晶体管也立马就出现了呢。

是的，在这里需要注意的就是这个**晶体管**了。
晶体管中有三个电极，分别是 E（发射极）、B（基极）和 C（集电极），通过这三个电极来实现**放大**的作用。



晶体管的作用示意图

那么，晶体管具体是怎样起到放大作用的呢？
当电路中有电压起作用时，基极和发射极之间有电流流过。这被称作“**①基极电流**”。
以这个基极电流为契机，集电极和发射极之间也有电流流过，这被称作“**②集电极电流**”。

嗯嗯。**多亏了基极电流，才产生了集电极电流**，哈……

请注意，从现在开始讲的内容非常重要。这个集电极电流会成为基极电流的**数十倍甚至数百倍**呢！

呀呀呀呀！能剧增这么多啊！

是的。如上所述，晶体管就这样完成了**放大**的作用。
基极电流被称作**输入电流**，集电极电流被称作**输出电流**，这两个数据的比值被称作**电流放大率**。
这是表示电流放大程度的量。

电流放大率

$$A_i = \frac{i_{out}}{i_{in}}$$

输出电流

输入电流

知识点！如果 A_i 的值大于 1，那么输出电流 > 输入电流，
所以电流被“放大”了。

嗯嗯。能够把电流放大，晶体管真的很了不起呢！

是啊。但是，就是这个起着重要作用的晶体管，也有让人头疼的问题啊。
实际上，一旦有了晶体管，**电路的解析会变得非常复杂。**

在求取**阻抗**、**频率特性**※、**电流放大率**等数据的时候，如果电路中包含晶体管，这些数据都将难以计算出来。

※ **所谓频率特性**，是表示频率和某个物理量之间关系的量。能够画出随着频率的变化而发生变化的图像，等等。详细内容请参考第 219 页。

啊！那我们该怎么办呢？

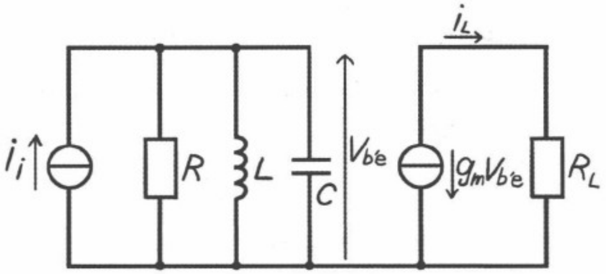
嘿嘿。解决这个问题的方法就是“**等效电路**”。

等、等效电路？

等效电路

简而言之，所谓等效电路，就是“**把电子电路中的晶体管等电子器件用** *RLC* **和电源来替换表示的像电气电路的电路**”。

接下来让我们亲眼目睹一下**谐振放大电路的等效电路**吧。

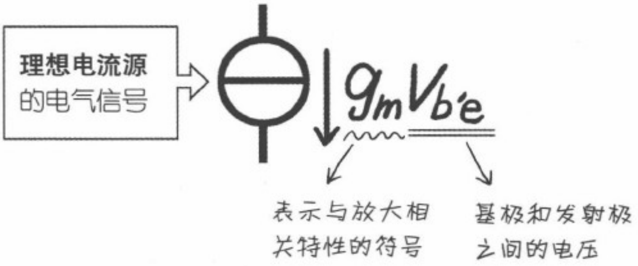


谐振放大电路的高频率等效电路简略图

※ 所谓**高频率**，指的是像一般的电波那样频率很高，人类用耳朵听不到的频率。
与之相对的**低频率**，指的是人类能够用耳朵听到的频率。

啊，跟刚才的那个电路图相比，的确清晰多了。而且也没有晶体管了。
但是，还是有一些看不习惯的电气符号啊。而且有些文字我也不认识。

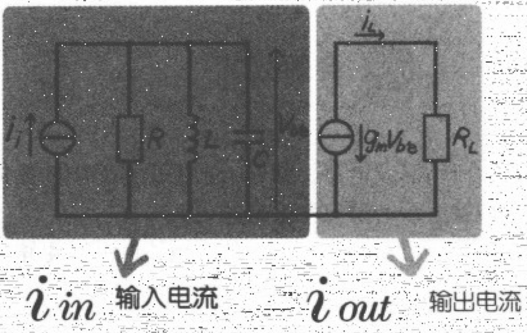
看上去的确很复杂哈。那我就再来对其进行一次简化，如下图所示。



所谓**理想电流源**，指能够产生任何大小的电流的理想装置，是为了简化电路解析而想象出来的理论上的装置。

总而言之，关于这个电路图最值得注意的一点是，电路图的左侧表示**输入**侧，右侧表示**输出**侧。

为了便于理解，可以表示如下。



哦！两者之间泾渭分明呢！呃，这么说来，只要分别求出电流的值，再求出两者的**比值**，就能求出**电流放大率**了啊。

就是这么回事儿。
作为结论，这个电路的**电流增幅率**的计算公式可以表示如下。
现在，只要看一眼就能知道“原来是这么回事儿啊”。

$$\boxed{A_i = \frac{-g_m R_L}{1 + jR\left(\omega C - \dfrac{1}{\omega L}\right)} \begin{array}{l} \leftarrow \text{输出电流} \\ \leftarrow \text{输入电流} \end{array}}$$

哦。那我就暂且先看看吧。

如上所述，通过等效电路，我们弄清楚了**谐振放大电路中的电流放大率**。但在此还有一个非常重要的知识点一定要记住。

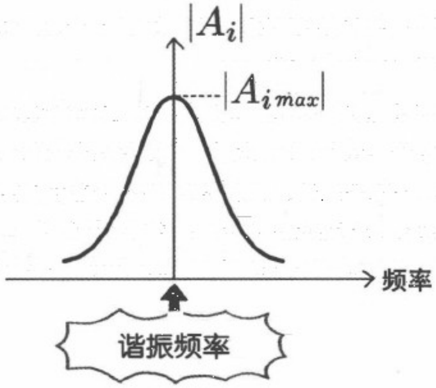
哎，还有什么问题啊？

青沼君，你还记得最近刚刚说过的**谐振频率**吗？（请参考第 209 页）

呃，应该是线圈和电容器的协同作业而产生的频率。
谐振频率发生时，**阻抗（交流电的电阻）最小**，**电流最大**，是吧。

说的没错！实际上，这个**谐振频率**和刚才我们所说的**电流放大率**有着很深的渊源呢。

请看下面这个图像。这个图像的横轴是频率。
纵轴表示**电流放大率**的大小。



谐振放大电路中电流放大率的频率特性

※ 如上所示，表示频率和某个物理量之间关系的量，被称作频率特性。

这个图像……**谐振频率发生时，电流放大率最大**啊！
哎，就算在这里，谐振频率也很重要啊。

完全正确！一定要把这个特性牢记在心哈。
接下来我大概进行一下总结。
青沼君在旋转电台调节器寻找想听的广播节目的频率时，收音机内部发生了什么事情呢?

嗯。为了把那个频率变成谐振频率，可变电容器在起作用。
谐振频率发生时，**阻抗（交流电的电阻）最小，电流最大。**
与此同时，**电流放大率也达到最大值。**

轻车熟路了呢，青沼君。
好了，接下来我们就以此为基础，一起来解答问题吧。

问题　请求出可变电容器的范围

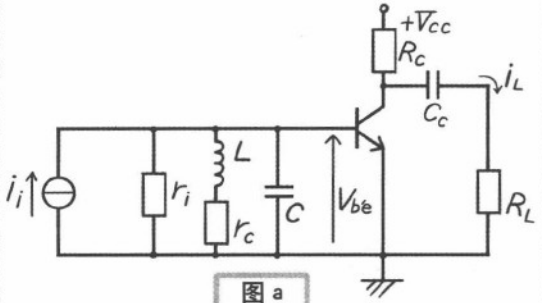


图 a

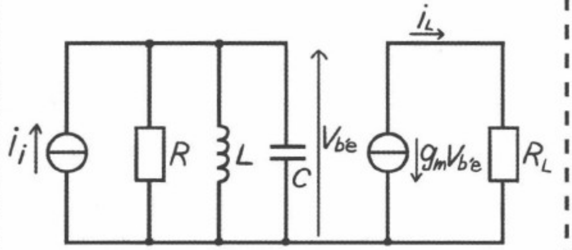


图 b

如图 a 所示的谐振放大器，如果它能够接受 AM 收音机信号，那么请求出此时可变电容器 C 能够设置的范围。另外，在图 a 的等效电路图 b 中，假定 $L = 1\text{mH}$，$540\text{kHz} < f < 1600\text{kHz}$。

（※ 图 a、图 b 跟第 215 页和第 217 页的电路图相同）

问题解析

呃，因为能够接收收音机信号，所以谐振放大器的电流放大率最大呢。

是的！这个谐振放大器的电流放大率的计算公式，刚才我们已经讲过了呢。

$$A_i = \frac{-g_m R_L}{1 + jR\left(\omega C - \dfrac{1}{\omega L}\right)}$$

只要分析这个公式在什么情况下取最大值就可以了。
请回忆一下角频率 $\omega=2\pi f$，还有 $f=2\pi/\omega$。

嗯，嗯。问题中的 f 和电流放大率公式中的 ω 之间有着千丝万缕的联系呢。

A. 解答

这个谐振放大器的电流放大率是

$$A_i = \frac{-g_m R_L}{1 + jR\left(\omega C - \dfrac{1}{\omega L}\right)}$$

只要求出这个算式取最大值时的 $f = 2\pi/\omega$，就能求出能够接收收音机信号的频率。也就是说，求 A_i 取最大值时的频率 f（角频率 ω）要从

$$\omega C - \frac{1}{\omega L} = 0$$ 中求取。

要点！ 只要 A_i 的分母最小，那么 A_i 的值就最大。

满足这个等式的 ω 的值是 $$\omega = \pm\frac{1}{\sqrt{LC}}$$

因为 $\omega > 0$，所以 $$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

因为负数的频率不存在

所以，能够满足角频率 ω 这个条件的 C 的值是：

$$\omega^2 = \frac{1}{LC}$$ （等号两边同时平方）

$$\omega^2 L C = 1$$

所以 $$C = \frac{1}{\underbrace{\omega^2}_{\text{代入 } f=2\pi\omega} L} = \frac{1}{4\pi^2 f^2 L}$$

要点！ 接下来把 f 和 L 的值代入 C 的这个计算公式。

根据问题中的条件可知，L=1mH,540kHz $< f <$ 1600kHz

当 f = 540kHz 时，$C \approx$ 86pF

当 f = 1600kHz 时，$C \approx$ 10pF

这样便求出了可变电容器 C 的值，大概是 10pF $< C <$ 100pF。

（※ 关于这个答案，将会在下一页进行详细说明。）

呜呜呜呜呜呜……刚才这个问题的最后结果我看不懂。
计算结果明明是“86”，为什么最终答案却变成了“大概是从 10 到 100”了呢？
86 大概成了 100！就算是大概，这大概的出入也太大了吧。

啊，对不起。忘记解释了，这么说是有正当理由的。
实际上，电容器的电容量是这样来决定的。

E3 系列：以 10、22、47 为基数的**倍数**
E6 系列：以 10、15、22、33、47、68 为基数的**倍数**

因此，跟 86 这个数字最相近的就是 100 了。

噢。不是简简单单地取近似值或者偷工减料这么回事儿啊！

当然不是了。也就是说，可变电容器的电容量能够在这个数值范围内自由地进行调节。

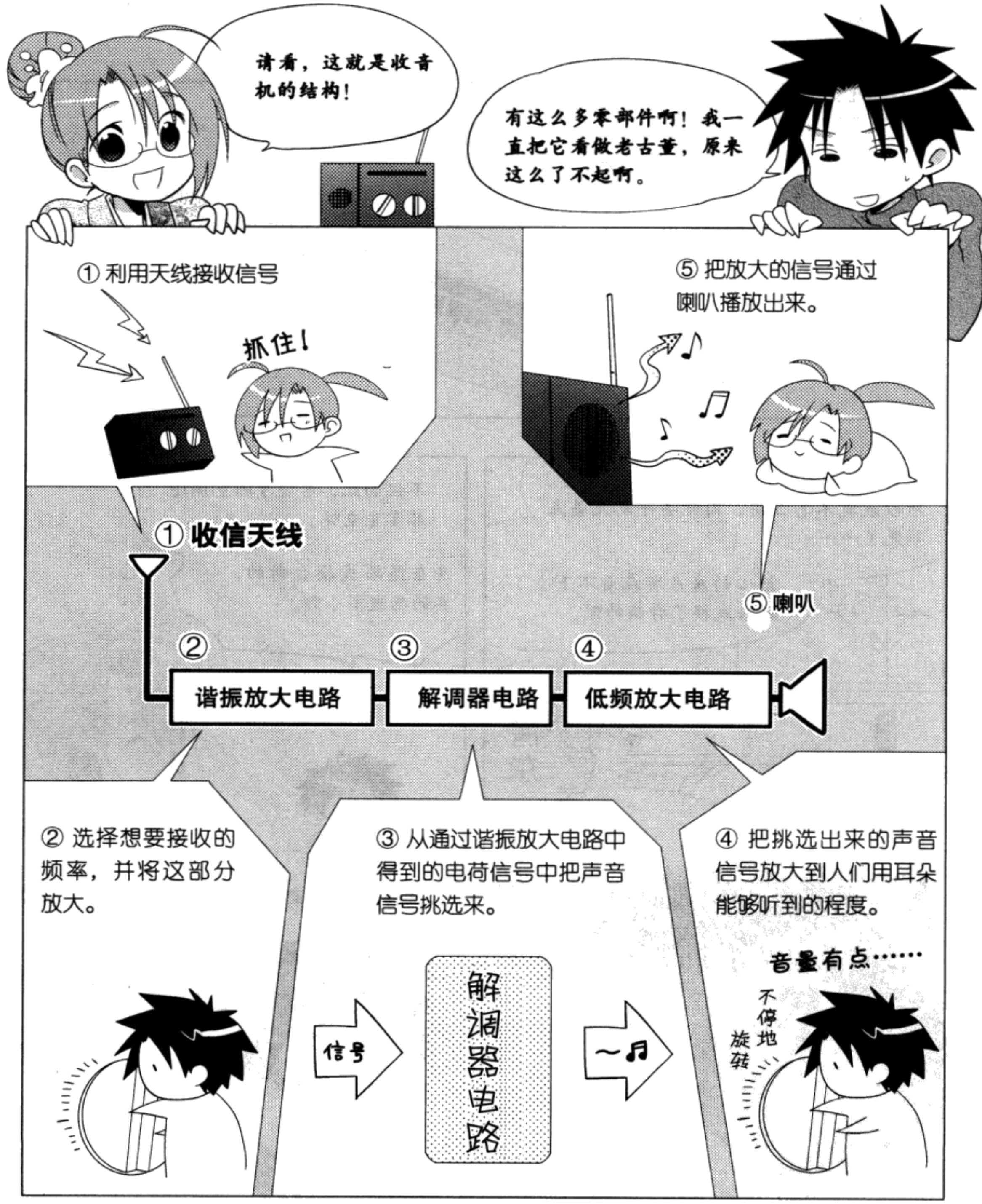
哎呀呀……
最后还需要可变电容器的相关知识啊，真是个复杂的问题呢。

另外，电容器的单位是 F（法），实际上还经常使用到 pF（皮法）、μF（微法）等单位。

P（皮） $10^{-12}=\frac{1}{10^{12}}$（一兆分之一）	μ（微） $10^{-6}=\frac{1}{10^{6}}$（百万分之一）

呵呵。
问题虽然很难，但我终于完全弄明白了。
多亏了这个**谐振放大电路**，我们才能收听收音机啊！

嘿嘿，虽然这样表述起来有些生涩……
但谐振放大只不过是能够收听收音机的第一步！
实际收听收音机时，还要经历好几个其他的步骤呢。



① 利用天线接收信号

⑤ 把放大的信号通过喇叭播放出来。

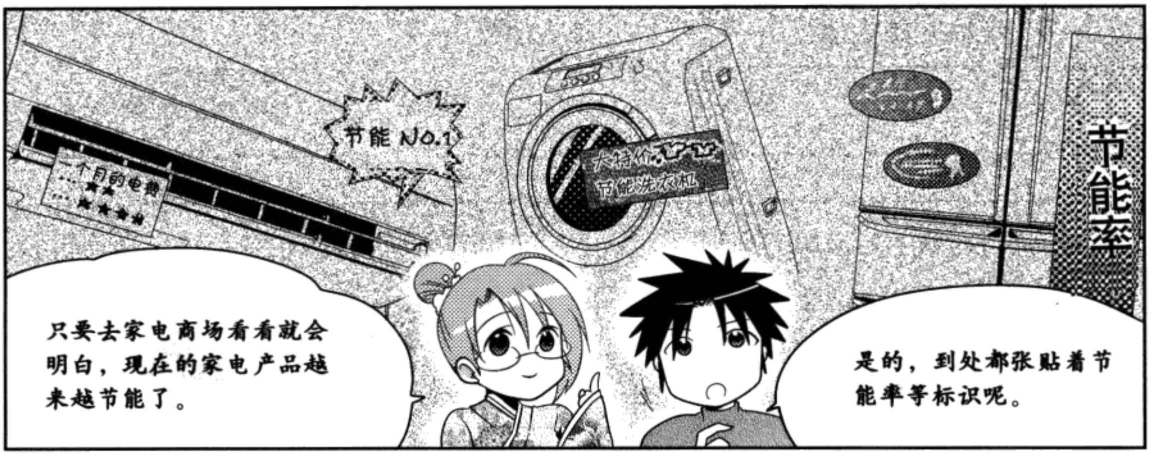
② 选择想要接收的频率，并将这部分放大。

③ 从通过谐振放大电路中得到的电荷信号中把声音信号挑选来。

④ 把挑选出来的声音信号放大到人们用耳朵能够听到的程度。

3 功率因数相关的电气数学问题

功率因数改善的两个方法


节能NO.1
一个月的电费
大特价
节能洗衣机
节能率
只要去家电商场看看就会明白，现在的家电产品越来越节能了。
是的，到处都张贴着节能率等标识呢。


除了家电以外，其他产品的耗电量跟以前相比也有所下降，如电车。
这真多亏了很多人的共同努力呢。
然而，到头来这个“节能”到底是什么意思啊？为什么这会成为商品的卖点呢？
哎……
就是啊，到底是什么意思呢？

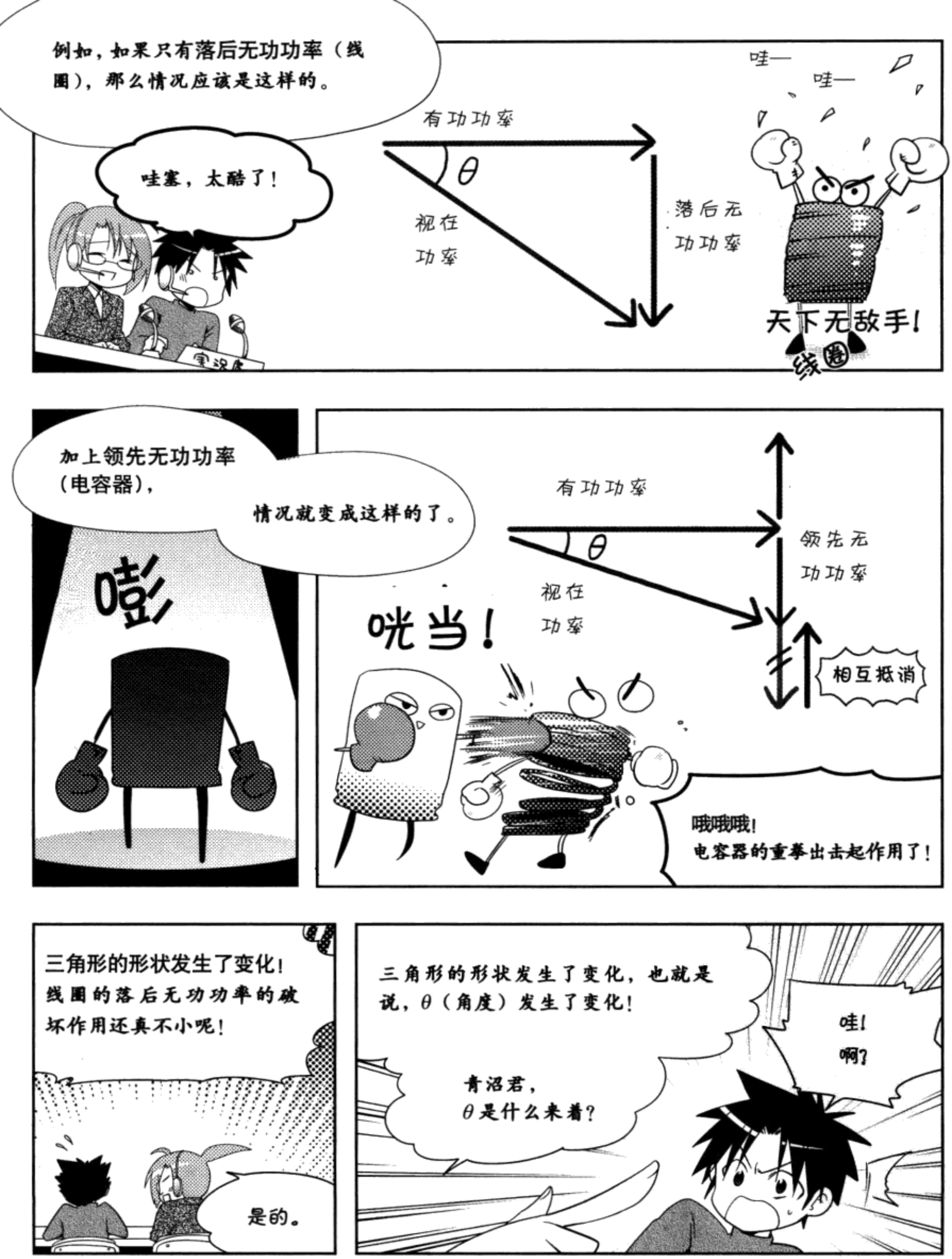

所谓节能，意思是所消耗的能源很少。
在电气领域，意思是所消耗的电能很少。
节能
॥
消耗的电能少
॥
功率因数改善！
消耗的电能少，
也被称作功率因数改善。

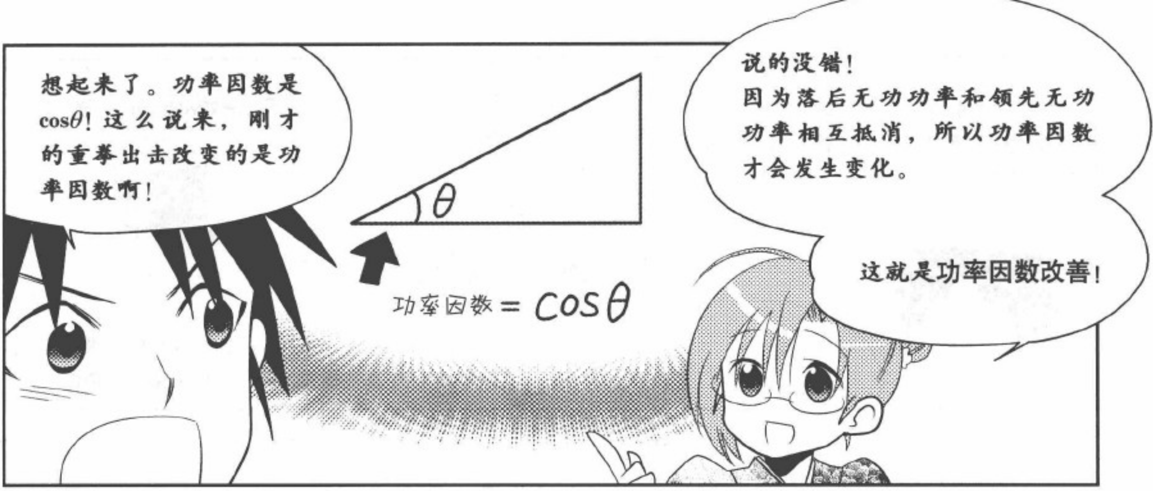

功率因数改善主要有以下两种方法：
(1) 控制无功功率
(2) 控制逆变器
接下来我们就详细介绍一下这两种功率因数改善的方法。
(1) 控制无功功率
(2) 控制逆变器

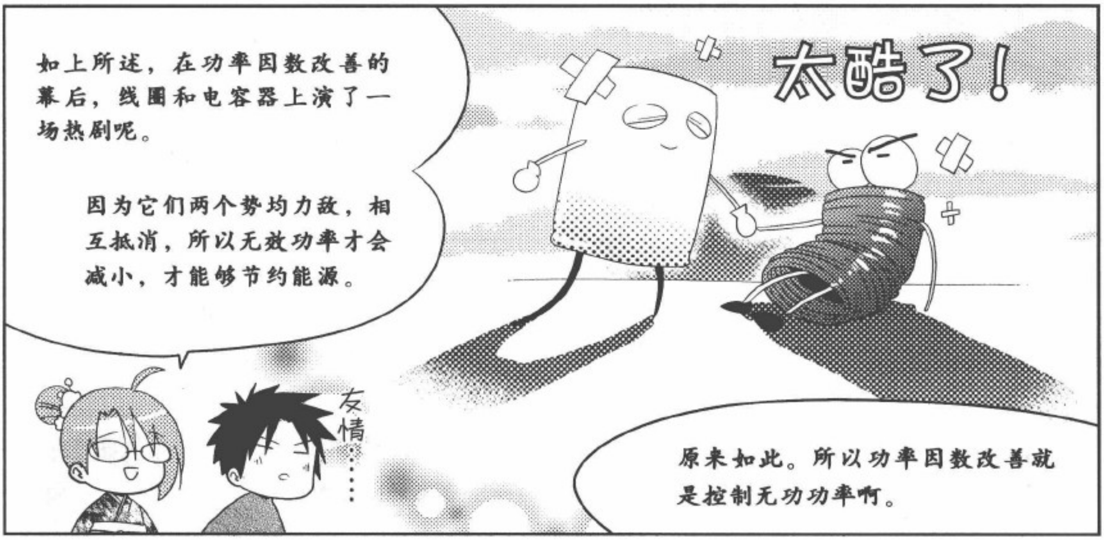
(1)控制无功功率


(1) 无功功率
首先来讲讲 (1) 无功功率。
请回忆一下我们之前讲过的三角形。
这个三角形的无功功率中还隐藏着秘密呢！
视在功率
无功功率
θ
有功功率
功率因数 = 有功功率 / 视在功率 = cosθ
噢，就是三角形的高啊。
实际上无功功率有两种。
无功功率
·有感电抗耗费的功率
·电容性电抗消费的功率
那就是“有感电抗耗费的功率”和“电容性电抗消费的功率”。
有感电抗和电容性电抗……
之前好像听过这两个词儿啊？
冷冰冰地
请好好回忆下。

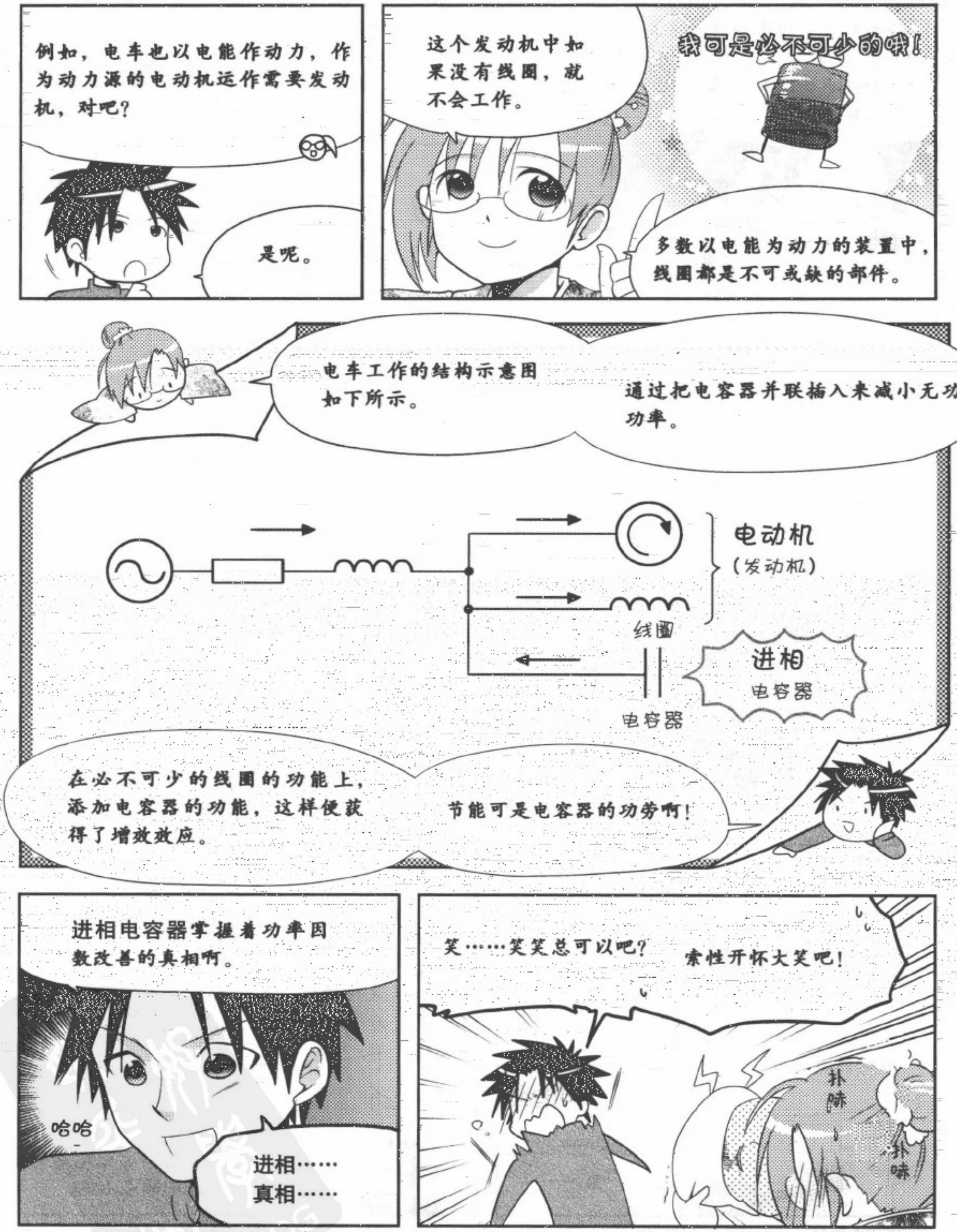

啊，是他们！
是线圈和电容器呢！
你好！
有感电抗是交流电中线圈的电阻。电容性电抗是交流电中电容器的电阻。
（请分别参考第 120 页和 122 页）
那么，在这里我们也用矢量来进行分析。
啾
“有感电抗（线圈的电阻）所消耗的功率”是落后无功功率，“电容性电抗（电容器的电阻）所消耗的功率”是领先无功功率，两个矢量之间的关系如下所示。
这两个矢量是相互抵消的关系！两个矢量的和就是无功功率。
无功功率
领先无功功率
（电容器）
有功功率
落后无功功率
（线圈）
方向正好相反啊……看来关系很差！
嗯？这么说来，线圈和电容器正是相位产生的原因呢？
说的没错！
这个矢量相互抵消的性质正是影响相位和功率的原因所在。


例如，如果只有落后无功功率（线圈），那么情况应该是这样的。
哇塞，太酷了！
实况席
有功功率
θ
视在功率
落后无功功率
哇—
哇—
天下无敌手！
线圈
加上领先无功功率（电容器），情况就变成这样的了。
嘭
咣当！
有功功率
θ
视在功率
领先无功功率
相互抵消
哦哦哦！电容器的重拳出击起作用了！
三角形的形状发生了变化！线圈的落后无功功率的破坏作用还真不小呢！
是的。
三角形的形状发生了变化，也就是说，θ（角度）发生了变化！
青沼君，θ是什么来着？
哇！
啊？





※ **进相电容器**是“因其作用而得名”的，跟可变电容器不同，并不是那种能够“顾名思义的零部件”。


例如，电车也以电能作动力，作为动力源的电动机运作需要发动机，对吧？
是呢。
这个发动机中如果没有线圈，就不会工作。
我可是必不可少的哦！
多数以电能为动力的装置中，线圈都是不可或缺的部件。
电车工作的结构示意图如下所示。
通过把电容器并联插入来减小无功功率。
电动机
（发动机）
线圈
电容器
进相
电容器
在必不可少的线圈的功能上，添加电容器的功能，这样便获得了增效效应。
节能可是电容器的功劳啊！
进相电容器掌握着功率因数改善的真相啊。
哈哈
进相……
真相……
笑……笑笑总可以吧？
索性开怀大笑吧！
扑哧
扑哧

(2) 控制逆变器

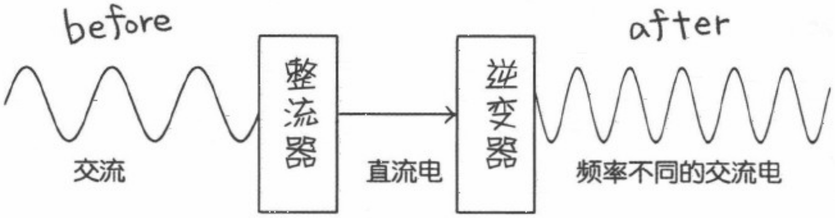
那么，接下来我们继续讲解功率因数改善的另外一个方法——**控制逆变器**。

逆变器？那是什么东西？

逆变器就是“**把直流电转换为交流电的装置或电路**”。
空调和电车中都有哦。

哎，直流电转换成交流电？为什么要进行这样的转换？
空调等家电使用的本来不就是来自插座的**交流电**吗？
※ 电车有的使用直流电，有的使用交流电。

嘿嘿嘿。实际上，**逆变器**的目的是“**自由转换频率**”。
请看下图。



整流器和逆变器改变频率的情况

逆变器和**整流器**是一对。
插座中的交流电首先通过**整流器**转换成直流电，然后通过逆变器转换成**其他频率的交流电。**

哎！频率也能进行转换啊。

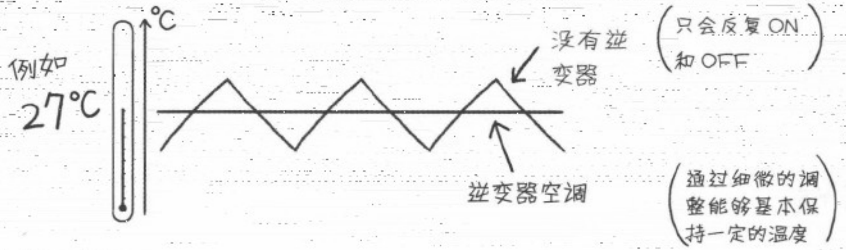
是的。通过这个逆变器和控制装置的组合，能够做很多事情。
所谓**能够自由地改变频率**，就是**能够自由地改变发动机的转速**，真的非常便利。

例如，在一辆**电车**中，通过逆变器改变频率可以进行**速度调整**。

空调的话，能够通过逆变器来进行**温度调整。**

如果没有逆变器，那么发动机只有 ON（全运转）和 OFF（停止）两种状态。

也就是说，难以“保持一定的温度”。



通过控制逆变器来调整温度的示意图

如果温度一定，那么消耗电能的功率变化也会减少。

如上所述，**控制逆变器**不但便利，而且还能节约能源。

明白了。如果反复 ON 和 OFF，那么电费就会变多！

另外，还有一个问题需要牢牢记住。

实际上，**频率和功率因素之间有着很深的渊源呢。**

我们不妨来分析分析看。

电容性电抗（电容器）跟频率**成反比**。

有感电抗（线圈）跟频率**成正比**，是吧。（请参考第 120 页）

也就是说，**“当频率超过某个数值后，就会对电容性电抗不利，对有感电抗有利，因此，其结果则是功率因数状态变差”**。

糟了。如果功率因数状态变差，那频率岂不就不能改变了嘛。这可该怎么办啊?哎呀。

请尽管放心吧。举个例子来说明，例如电车——
当速度随着频率的变化而变化时，同时也会调整电容器。
随着频率的变化而对电容性电抗（电容器）做相应的调整，从而达到**功率因数改善**的目的。

哦。真不愧是电容器啊，毫无差错呢!

另外，空调也需要耗费一番功夫。
现在，空调已经能够进行温度调节了，因此运转时间很明显更长了。
“当达到适当的温度后，温度保持一定的状态”时，其运转时间最长。
因此，此时进行**功率因数改善**能够大幅节约电费。
※ 节约空调电费的方法还有很多。详细内容请参考第 241 页。

嗯嗯。也就是说，通过控制逆变器，从而使发动机能够自由运作，同时也切实进行了功率因数改善呢。

说的太对了！综上所述，接下来对功率因数改善进行总结。

把 R、L、C 和频率 f 联系在一起就能计算出**功率因数。**

功率因数改善的方法有两种。

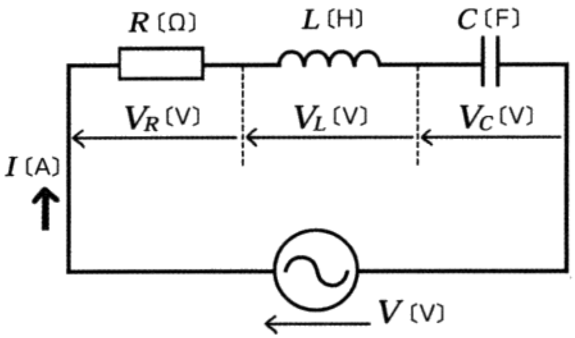
（1）通过 C 控制……**控制无功功率**
（2）通过 f 控制……**控制逆变器**

改变**频率** f 的逆变器非常便利，电容器 C 也非常活跃呢。
对于空调来说，适宜的温度对健康有好处，节约能源还对钱包有好处。

就是这么回事儿。接下来，我可已经准备好了**关于功率因数的习题**了哦。

……这是不是有点太残酷了啊……

问题　请求频率的范围



在 *RLC* 串联电路中，请求出功率因数在 86.6% 以上时电源的频率 *f* 的范围。另外，功率因数是 86.6% 时的功率因数角可以看做 30°　。

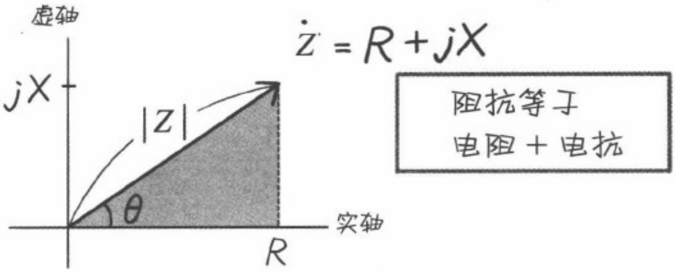
解析

嗯。通过刚才讲述的内容，我知道了功率因数和频率是相互关联在一起的。
可关于这个问题，该怎么分析才好呢？

请再次开始回忆一下，功率因数能够表示为 cosθ, 对吧？
为了分析这个 cosθ，可以借助于**复数平面上的阻抗三角形。**

阻抗三角形？我还是第一次听说呢。
是表示阻抗的三角形吗？

对了，就是这个意思。假设有一个 ***RLC* 串联电路。**
电路中的电阻为 R，电抗为 X，阻抗为 Z，那么这几个量的关系能够用如下直角**三角形**来表示。



此时，功率因数 $\cos\theta = \frac{R}{|Z|}$

原来如此！关于 *RLC* **串联电路**的阻抗和电抗的这些知识我还都记得。我自己也能解答出来。

A. 解答

因为 *RLC* 串联电路的阻抗

$$Z = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

所以 $\cos\theta$ 则是

$$\cos\theta = \underset{\cos 30^\circ}{\boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}}} < \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

因为这个算式太复杂，所以改用 $\tan\theta$ 来分析。

要点！只要掌握了三角形的性质，就可以用 $\tan\theta$ 来代替 $\cos\theta$ 进行分析了。

$$\tan\theta = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} < \underset{\tan 30^\circ}{\boxed{\frac{1}{\sqrt{3}}}}$$

请注意，当用 $\tan\theta$ 来分析时，不等号的方向发生了改变！

在下一页中，将对这个算式进行进一步的变形整理。

对这个算式进行整理可得
$$\tan\theta=\frac{\omega L-\dfrac{1}{\omega C}}{R}<\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\omega L-\frac{1}{\omega C}<\frac{R}{\sqrt{3}}$$（两边同时乘以 R）

$$\omega^2LC-1<\frac{\omega CR}{\sqrt{3}}$$（两边同时乘以 ωC）

上述公式变形可得
$$\sqrt{3}\omega^2LC-\omega CR-\sqrt{3}<0 \quad \cdots\cdots ①$$

因此，只要求出来使不等式①成立的 $\omega=2\pi f$ 即可。

在此假设 $\sqrt{3}\omega^2LC-\omega CR-\sqrt{3}=0$ 的解是 α 和 β（$\alpha<\beta$），那么不等式①的解则为 $\alpha<\omega<\beta$。

要点！使用解的计算公式（请参考第 200 页）。

$$a=\frac{CR-\sqrt{C^2R^2+12LC}}{2\sqrt{3}LC}<0\,,\qquad \beta=\frac{CR+\sqrt{C^2R^2+12LC}}{2\sqrt{3}LC}$$

（$a<0$）

因为物理学中频率的值不可能为负数，所以

$$0\leqslant\omega\leqslant\frac{CR+\sqrt{C^2R^2+12LC}}{2\sqrt{3}LC}$$

对此算式进行分母有理化可得 $0\leqslant\omega\leqslant\dfrac{\sqrt{3}CR+\sqrt{3(C^2R^2+12LC)}}{6LC}$

当 ω=0 时，说明是直流电。
因为直流电有相位，所以功率因数当然是 100%！
当求取范围时，请忘记 ω=0（**直流电**）的情况。
另外，还一定要牢牢记住**阻抗三角形**哦！

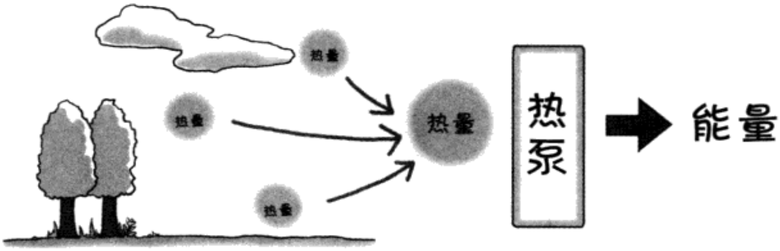
热 泵


呼，说话说得
我浑身燥热。
我用用你的空调
凉快凉快哈。
啪
咦
☆
等等！
你应该知道我目前的经济状况嘛！
虽说是节能空调，但更重要的是我
现在没有钱交电费啊！
窗户外边就是个天然空调，
把窗子打开就凉快了！
咔嚓
嘿嘿嘿！
跟你开玩笑的啦！
开玩笑……
……啊……
这么说来，空调既能制
冷，也能制热。
好好想想，还真让人觉
得不可思议呢。
嘿嘿嘿，
最后的话题就是
关于空调的。
实际上，空调不可思议的真正原因是“热泵”
技术的应用。
现在，热泵不仅应用在空调中，还应用
在其他各种各样的产品中。
还被称为地球变暖的决定性人物呢。
电气的
结构
我们来看看宣传手
册吧。

什么是热泵？

◆热泵的两个功能——制冷和制热◆

所谓“热泵”，指把空气中的热量聚集起来并将其转换成能量的技术。
能从无处不在的空气中获取能量，真的很了不起呢。



作为一种节能技术，近年来热泵备受人们关注。
实际上，在很久之前——100 多年以前，这项技术就被应用在冰箱、空调等产品的制冷功能中。

可是，为什么这个热泵到最近几年才受到关注呢？

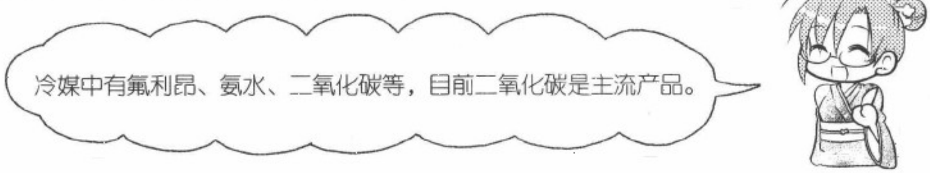
这是因为，实际上热泵不仅包括**制冷**功能，
还包括**制热**功能。

今天，热泵还被应用在**暖气**中，
也用来**供应热水**。

◆为什么能从空气中获得能量呢？◆

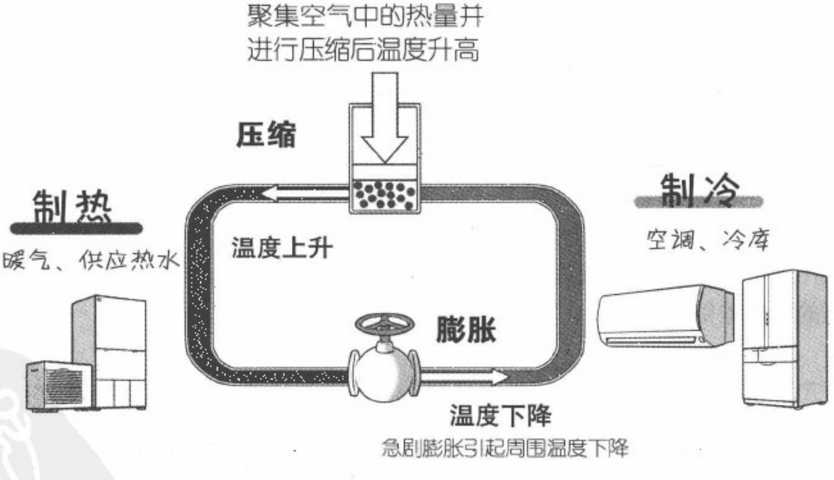
在被压缩或者膨胀后，温度也会随之发生变化，这是物质所具有的性质。
气体（空气）在被压缩后温度会升高，膨胀后温度会降低。
另外，**热量具有从温度高的地方流向温度低的地方**的性质。
热泵就充分利用了上述这些性质。

热泵中封闭保存着一种名为“**冷媒**”的物质。
所谓冷媒，是温度变化所不可或缺的起媒介作用的物质。
本来是煤气（气体），但通常会将其压缩成液体。



冷媒中有氟利昂、氨水、二氧化碳等，目前二氧化碳是主流产品。

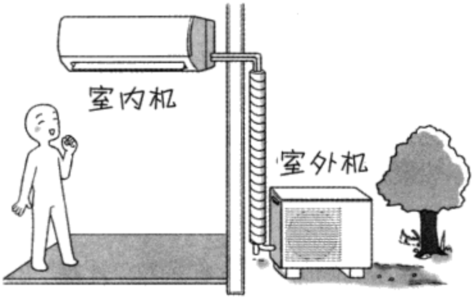
被压缩或者膨胀后，冷媒会引起温度变化。
利用这一温度变化就能够实现制冷和制热的目的。



热泵的结构示意图

引自 科学技术政策 http://www8.cao.go.jp/cstp/5minutes/013/index2.html，有部分修改

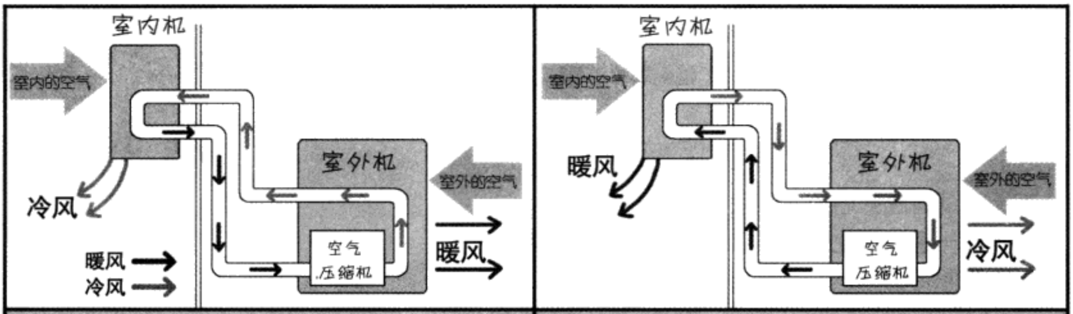
◆为什么空调既可以制冷，又能够制热？◆



空调通过改变**冷媒**的流动**（改变热量的流动方向）**能够实现制冷和制热两项功能。

空调由室内机和室外机两部分组成，冷媒在这两者之间循环流动。

热泵可以说是通过冷媒“使热量产生移动的技术”。



制冷时冷媒的循环情况

制热时冷媒的循环情况

引自 Energia 电能调查队 http://www.energia.co.jp/eland/chosatai/indes/html，有部分修改

◆为什么热泵能够节约能源？◆

这个便利的热泵工作时需要电能。
因为要用到电能，所以大家或许会觉得“根本就不节能”，但跟通常产生热能的方法相比，**所需要的电能差别很大**。

通常在产生热能的时候，只有使用能量这一部分需要耗费电能。然而，通过热泵产生热能的时候，只有热泵的运转耗费电能。之后便是聚集空气中的热量并进行移动而产生供人们使用的能量。也就是说，**发热的原理差别很大**。
这一原理的差异，正是节能的真正原因所在。

◆空调花费的电费比以前降低的原因◆

由于上述原因，热泵的能效非常好。
表示热泵能源消耗率的物理量是“COP”。

$$\mathrm{COP}=\frac{\text{制冷制热等能力〔kw〕}}{\text{消耗电能〔kw〕}}$$

例如，COP4 表示 1kW 的电能产生 4kW 的冷热能量。
今后我们也会继续关注热泵技术，不断提高电能的使用率。

Q 与 10 年前的空调相比，现在的空调在同一温度下更省电。这是为什么呢？

A “控制逆变器”
“通过进相电容器控制无功功率”
多亏了“热泵”技术，节能化
（消耗电能的减少）不断向前推进。


——日月如梭，
转眼间又到岁末年初的时节了呢。
横跨了一个年度，真不好意思了。
去年年底能结束就好了。
不、不，哪有这种事！你能教给我那么多知识，对我来说已经算是最大的惊喜了！
咯哒
咯哒
咯哒
咯哒
觉得电气数学怎么样？
有意思吗？
嗯，啊，
是的，非常有趣！
……真的就这么结束了啊……
……那个，
……难道？
我勉强你说了并不真实的感受？
唉！
不是不是不是不是！
是真的很有趣啦！


啊啊啊……
太失败了
心情一下子变得消极
悲观了……
啊……那个，
小橘！
机会难得，
要不我们一起去寺庙看看吧！
叮当
叮当
许什么愿望
了啊？
嘿嘿嘿！
希望小电君的产品
卖得越来越好！
NOTE
啊，啊……


太好了！不管怎样，
小橘又生龙活虎起来了。
青沼君，你不写张贺卡吗？
写上“祝愿青沼君电气数学学得越来越好”。
你看怎么样？
非常非常感谢！
不客气！
……啊
光
祝愿青沼君电气数学学得越来越好！
小橘的名字叫……
叫光啊。


你、你看了啊?
看见了吗?
对、对不起啊
嘭
说实话，最近我一直很挂念这件事儿。
可又总觉得没法开口询问……
真是个好名字啊
……我觉得。
光!
……关于这个名字的由来……
在天主教中，这个词是“与其抱怨和不满，不如抓住前进中的光明”的意思。
但是，我自己的性格却非常消极，黑暗且爱抱怨……
例如，在圣诞节的时候，我会想“让那些幸福的家伙们都陷入不幸吧!”就像这样，嫉妒心特别强烈，自己都很讨厌自己呢。

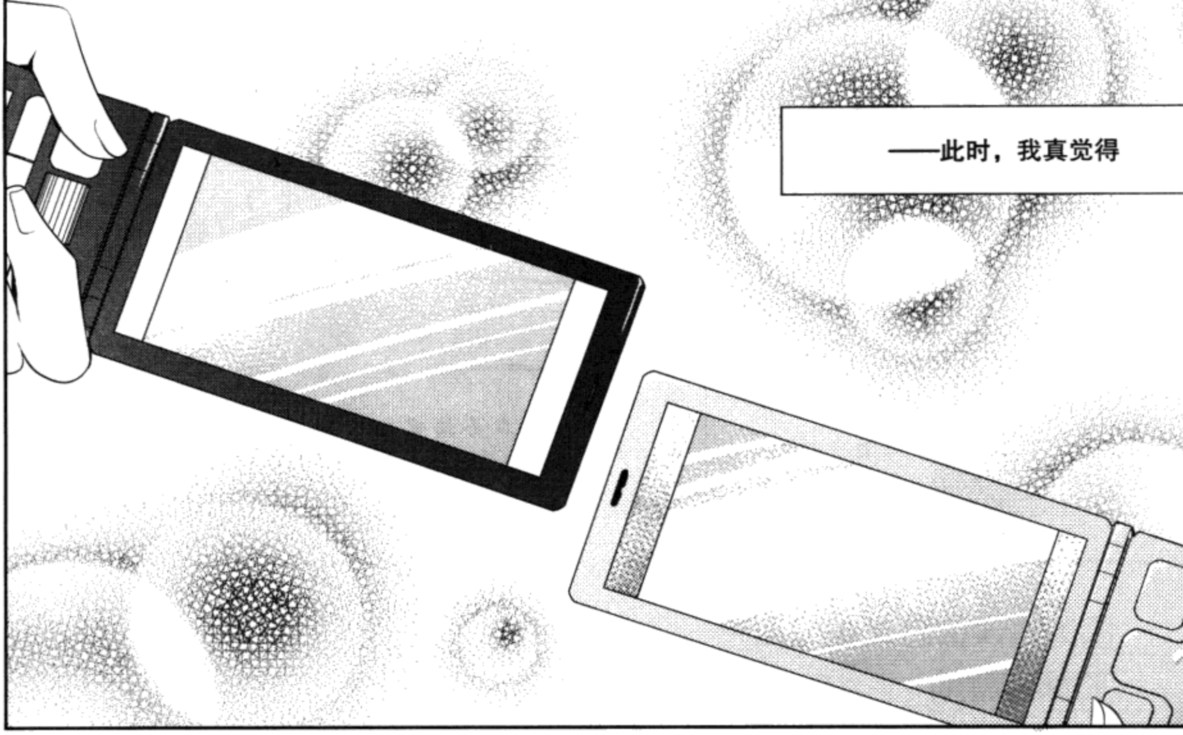

所以说，
叫这个名字……
自己都觉得惭愧。
……
……这个名字真是再合适你不过了呢，
“光”这个名字……
……不信的话，
你再好好想想看。
——在我们第一次见面的时候，
是你为我点亮了家里的电灯。


你不正是光吗？
除了是光还能是谁呢？
一定要好好学习数学，不迟到！不早退！
而，
而且……
这段时间我一直在想，小光自己就像电能一样呢。
感觉就像有个开关，或者说就像波浪一样。
一会儿阳光灿烂，一会儿阴云密布……
啾
啾
……然后，总觉得……
嗯……


……太了不起了……
你的存在非常重要……
……
啪啦
我
我——都在说些什么啊！
哎呀，我可没别的意思！
慌慌张张
请你就当做什么都没听见。
一定！！！


那个，
难道就像电气的计算那样，麻烦大了？
！！
我不是那个意思啊。
啊啊啊啊啊！该怎么说呢？
你骗人吧！
谢谢你啊，青沼君！
让你这么一说，我自己的名字……
我也开始喜欢了呢！
……没关系的……
太好了。


她笑了呢……
青沼君！
要是方便的话，我们互相留个联系方式吧？
只留个电话号码也行啊……
喂！！
可、可以吗？
我、我手机的电话号码本里还从来没存过女孩子的号码呢。
嘿嘿
那么就让我成为第一个吧。
如果再遇到关于电气数学方面的问题时可以联系我。
……没事儿闲着的时候也可以联系我。
总之，这样就能随时随地联系了。
真的啊！！
好的，好的，我给你发过去哈！
啪啪
啪啪
好的。



跟小光君相遇，
是我人生中的一缕灿烂阳光。


哇，
小橘！
我刚才不是把你送到车站了吗？
扑通扑通扑通扑通
……我坐上电车，马上就想给你发短信了……
好不容易编辑好了短信，结果……
因为错误信息又被退回来了啊啊啊啊！
你是不是没交电话费，被停机了——
啊!!!
咣
以后可要按时交电话费!!!
小电君，攻击!!
哇——对不起啊!
……看来是不得不努力
改变自己的状况了啊……

相关书籍　参考文献

相关书籍

这里列举了一些与电气数学有关的比较简单的书籍，大家读完本书后可以尝试阅读这些书。

- 大谷嘉能・幅敏明 著
『完全マスター電験三種受験テキスト 電気数学』オーム社（2009）

- 家村道雄 著
『電験三種 計算問題の徹底研究』オーム社（2005）

- 真栄里仁雄 著
『基礎から理解！電験三種合格のための数学入門』オーム社（2006）

- 武原春輝 著
『電験三種 数学超入門』オーム社（2009）

参考文献

- 田中賢一 著
『マンガでわかる電子回路』オーム社（2009）

- 飯田芳一 著
『マンガでわかる電気回路』オーム社（2010）

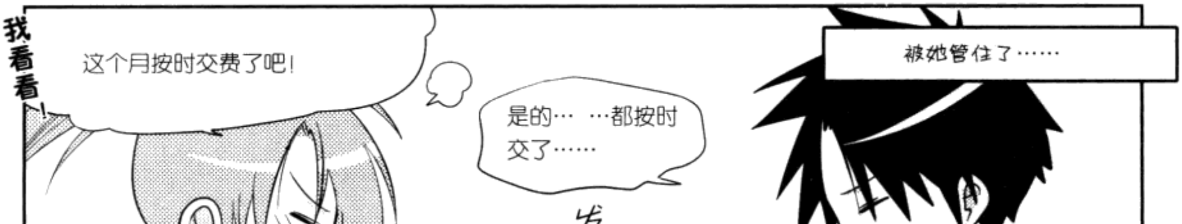
- 大熊康弘 著
『図解でわかる はじめての電気回路』技術評論社（2000）

- Newton 別冊
『虚数がよくわかる ——“ありもしない”のに、難問解決に不可欠な数』
ニュートンプレス（2009）

- 社団法人 日本電気技術者協会 音声付き電気技術解説講座
http://www.jeea.or.jp/course/

- 今の技術がよくわかるテクノマガジン テクマグ
http://www.tdk.co.jp/techmag/index.htm

- 電気屋ののちん日記講座
http://plaza.rakuten.co.jp/nonochin1974/


我看看！
这个月按时交费了吧！
是的… …都按时交了……
发票
被她管住了……

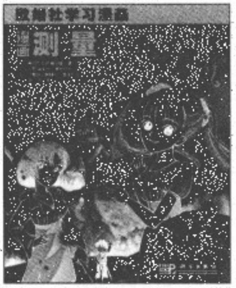
经典图书 好评不断

漫画量子力学
定价：32.00元

漫画流体力学
定价：32.00元

漫画热力学
定价：32.00元

漫画半导体
定价：32.00元



漫画测量
定价：32.00元

漫画顺序控制
定价：32.00元

漫画相对论
定价：32.00元

漫画物理之力学
定价：29.80元

漫画微分方程
定价：32.00元

漫画微积分
定价：29.80元

漫画线性代数
定价：32.00元

漫画傅里叶解析
定价：32.00元

经典图书 好评不断

漫画电学原理
定价：32.00元

漫画电子电路
定价：32.00元

漫画电气电路
定价：32.00元

漫画统计学
定价：29.80元

漫画统计学之回归分析
定价：29.80元

漫画统计学之因子分析
定价：29.80元

漫画数据库
定价：32.00元

漫画密码
定价：29.80元

漫画生物化学
定价：32.00元

漫画分子生物学
定价：32.00元

漫画宇宙
定价：32.00元

漫画项目管理
定价：32.00元

[General Information]
书名=漫画电气数学
作者=（日）田中贤一著
页数=256
SS号=13239643
出版日期=2012.07
出版社=北京市：科学出版社
尺寸=16开
原书定价=32.00
参考文献格式=（日）田中贤一著．漫画电气数学．北京市：科学出版社，2012.07．
内容提要=你是不是正在学习电气数学知识？你是不是正为电气数学中恼人的符号头痛不已？你是不是想学好电气数学从而更好地学好电学原理？那么，对你来说，这漫画电气数学再适合不过了，这是世界上最简单易学的电气数学教科书，它通过漫画式的情境说明，让你边看故事边学知识，每读完一篇就能理解一个概念，只要你跟着主人公的思路走，那么你肯定能在较短的时间内掌握电气数学相关知识！